



Technische
Universität
Braunschweig



INSTITUT
FÜR AKUSTIK

Effiziente Unsicherheitsquantifizierung in der Akustik mittels eines Multi- Modell-Verfahrens

Tobias Paul Ring

Schriften des Instituts für Akustik

Band 1, 2020

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Sabine C. Langer

Schriften des Instituts für Akustik

Band 1, 2020

Tobias Paul Ring

**Effiziente Unsicherheitsquantifizierung in der Akustik
mittels eines Multi-Modell-Verfahrens**

Shaker Verlag
Düren 2020

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Braunschweig, Techn. Univ., Diss., 2019

Copyright Shaker Verlag 2020

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-7193-1

ISSN 2699-5336

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren

Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Effiziente Unsicherheitsquantifizierung in der Akustik mittels eines Multi-Modell-Verfahrens

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Tobias Paul Ring
geboren in: Göttingen

eingereicht am: 20.06.2019
mündliche Prüfung am: 19.09.2019

Vorsitz: Prof. Dr.-Ing. Jens Friedrichs
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Sabine C. Langer
Jun.-Prof. Dr.-Ing. Ulrich Römer

2020

Alle Wissenschaft geht ursprünglich aus dem Bedürfnis des Lebens hervor.

Ernst Mach; Die Mechanik.

Danksagung

Die vorliegende Dissertation ist im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in den Jahren 2014 bis 2019, in der Arbeitsgruppe Vibroakustik am Institut für Konstruktionstechnik (2014 bis 2018) und dem Institut für Akustik (seit 2019) der TU Braunschweig entstanden. Ich möchte an dieser Stelle allen Menschen meinen Dank aussprechen, die mich während dieser Zeit beruflich und privat begleitet haben.

Mein ganz besonderer Dank gebührt Frau Prof. Dr.-Ing. Sabine C. Langer, die mir die Möglichkeit der Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter und durch die Betreuung meines Promotionsvorhabens die Chance zur Anfertigung dieser Dissertation eröffnet hat. Die vielen Stunden wissenschaftlicher Diskussion, das ehrliche Feedback zu allen Ebenen meines Tuns und manchmal auch einfach die Worte der Motivation haben zentral zum Finden meines Weges und zum Gelingen meiner wissenschaftlichen Arbeit beigetragen. Darüber hinaus habe ich in den vergangenen Jahren eine Persönlichkeitsentwicklung erleben dürfen, die ohne Sabine Langer in der Form nicht möglich gewesen wäre.

Weiterhin möchte ich Herrn Jun.-Prof. Dr.-Ing. Ulrich Römer für die Übernahme des Ko-Referats und die große Hilfe während der Erstellung dieser Arbeit danken. Die wertvollen Diskussionen, sein hilfreiches Feedback und seine Hilfsbereitschaft bei der Fertigstellung des Manuskripts haben mir außerordentlich geholfen. Weiterhin danke ich Ihm für die Korrektur einiger mathematischer Unzulänglichkeiten. Durch seinen Einfluss hat die Arbeit wesentlich gewonnen. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Jens Friedrichs für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts für Akustik möchte ich hiermit ebenfalls meinen Dank aussprechen. Das freundschaftliche und fachlich intensive Verhältnis haben wesentlich zu dieser Arbeit beigetragen. Dies gilt vor allem für die große Hilfe bei jeglichen Fragen zur richtigen Benutzung der FEM-Software und die vielen Stunden der Diskussion am Whiteboard.

Mein ganzer Weg bis zu diesem Zeitpunkt wäre nicht ohne zwei Personen im meinem Leben möglich gewesen: Ursula und Hans-Joachim Ring. Meinen Eltern und Ihrer unermüdlichen Förderung verdanke ich meinen Spaß und mein Interesse an Wissenschaft und Technik und damit nicht zuletzt meine Berufswahl. Viel mehr aber danke ich Ihnen, dass ich mir immer Ihrer vollen Unterstützung und Ihres Vertrauens sicher sein durfte. Meine Eltern haben mir die Möglichkeit eröffnet, jederzeit hinter jede Tür zu schauen. Ohne Sie wäre diese Arbeit nicht entstanden. Weiterhin

danke ich meinem Bruder Michael, der mich immer mit Rat und Tat unterstützt und damit ebenfalls zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Ich möchte auch allen meinen Freundinnen und Freunden danken, von denen jede/r auf ihre/seine Weise zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Vor allem danke ich allen Menschen, die in der finalen Phase des Schreibens das Korrekturlesen übernommen und wertvolle Hinweise und Korrekturvorschläge gegeben haben.

Abschließend möchte ich meiner Partnerin Manuela und meinem Sohn Erik Paul danken. Während der Zeit der Anfertigung dieser Arbeit gab es einige Hochs und Tiefs. Ohne Euch wäre ich nicht durch alle diese Zeiten gegangen. Ich danke vor allem Dir, Manuela, für deine Unterstützung, dein Da-Sein und dass du mich immer wieder motiviert hast. Aber auch für das Korrekturlesen und deine Verbesserungsvorschläge möchte ich Dir danken. Erik, Dir danke ich für dein motivierendes Lachen und deinen inspirierenden Forscherdrang.

Braunschweig, im Januar 2020

Kurzfassung

Die Arbeit im Bereich der Akustik ist, wie in vielen anderen Fachdisziplinen, vom Einsatz numerischer Berechnungsmethoden geprägt. Das wahrscheinlich am weitesten verbreitete Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Die FEM gehört zur Klasse der Diskretisierungsverfahren. Trotz stetig steigender Leistung der verwendeten Computer sind numerische Berechnungen mit Diskretisierungsverfahren weiterhin speicher- und zeitintensiv. Daher haben sich Modellreduktionsverfahren zur Beschleunigung der Berechnung etabliert. Der Einsatz in der Akustik stellt dabei besondere Herausforderungen, die durch existierende Verfahren nur unzureichend adressiert werden. Vor allem für Berechnungen großer Strukturen im hohen Frequenzbereich erzielen die etablierten Verfahren eine geringe Reduktion des Berechnungsaufwands.

Der für Berechnungen erforderliche Modellierungsprozess ist nicht eindeutig, für eine Fragestellung sind häufig mehrere Modelle verwendbar. Die Modelle unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Ergebnisqualität und des zur Lösung erforderlichen Berechnungsaufwands. Häufig korrelieren diese Größen. Für Berechnungen mit der FEM im Frequenzbereich hängt die Einsetzbarkeit der zur Verfügung stehenden Modelle häufig von der Frequenz ab. Bei vielen verfügbaren Modellen kann somit für einzelne Frequenzbereiche jeweils das Modell verwendet werden, das bei geringstem Berechnungsaufwand eine ausreichende Ergebnisqualität bietet. Dies ist die Idee der vorliegenden Arbeit.

Die vorliegende Arbeit entwickelt ein Multi-Modell-Verfahren speziell für Anwendungen in der Akustik. Das Verfahren ermöglicht den Einsatz vereinfachter Modelle gemeinsam mit einem zu lösenden Referenzmodell zur Lösung einer gegebenen Berechnungsaufgabe. Das Referenzmodell ist dasjenige Modell, von dem im gesamten Frequenzbereich eine ausreichende Ergebnisqualität erwartet wird. Die zur Verfügung stehenden vereinfachten Modelle werden gegen das Referenzmodell validiert. Ein Kernaspekt des entwickelten Verfahrens ist die Entwicklung des dazu verwendeten Validierungsprozesses. Für den Fall einer erfolgreichen Validierung wird das Referenzmodell durch das vereinfachte Modell ersetzt. Eine Budgetplanung quantifiziert die Kosten zur Lösung der Modelle und setzt diese so ein, dass eine Rechenzeitersparnis erreicht wird.

Das entwickelte Verfahren wird für verschiedene Klassen vereinfachter Modelle verifiziert. Dazu werden vereinfachte Modelle auf verschiedenen Abstraktionsebenen des Modellierungsprozesses aus dem Referenzmodell abgeleitet. Dies sind das Realitätsmodell, das mathematische und das numerische Modell. Für vereinfachte Modelle,

die durch Variation des numerischen Modells erzeugt werden, erzielt das Verfahren gute Ergebnisse. Es wird eine Rechenzeiterparnis bei einem akzeptablen Fehler der approximierten Systemantwort erreicht. Weiterhin kann gezeigt werden, dass die erzielbare Rechenzeiterparnis mit dem resultierenden Fehler korreliert. Das Verfahren ermöglicht somit die Abwägung zwischen einer genauen, langsamen Lösung und einer schnellen Näherungslösung.

Nach der Verifikation wird das auf entwickelte Multi-Modell-Verfahren stochastische Untersuchungen mit der Monte Carlo-Methode und der globalen Sensitivitätsanalyse angewendet. Für diese Vielfachauswertungs-Anwendungen wird eine zusätzliche Rechenzeiterparnis erzielt, da die erforderlichen Validierungsprozesse ab der zweiten Berechnung entfallen können. Auch für diese Anwendungsfälle werden die zu berechnenden Größen, die statistischen Eigenschaften der Ausgangsgröße, mit einem geringen Fehler ermittelt. Insgesamt steht mit dem entwickelten Multi-Modell-Verfahren ein Ansatz zur Verfügung, mit dem die numerische Berechnung mit der FEM beschleunigt werden kann. Aufgrund der Berücksichtigung der Anforderungen numerischer Berechnungen von Wellenausbreitung mit Diskretisierungsverfahren ist es besonders für den Einsatz in der Akustik geeignet.

Abstract

The work of engineers and scientists in acoustics, as in several other disciplines, frequently relies on numerical computations. One of the most frequently applied techniques is the finite-element-method (FEM). The FEM is based on a discretized domain and computes an approximate solution to the partial differential equations over small elements. The performance of computers has increased over the past and still increases. Nonetheless, discretization method-based numerical computations are still challenging due to computational time and memory limitations. In order to handle these challenges, model reduction techniques have evolved in parallel with numerical computing methods. Nevertheless, the application of discretization methods in acoustics has specific requirements that are insufficiently met by existing techniques. Especially the handling of large-scale structures with high modal densities is cumbersome and the reduction in computational effort with existing model reduction techniques is rather low.

During a numerical computation, a model is developed. The required model generation process can not be generalized, hence, many different models can be suitable for a given task. The possible models oftentimes differ in the quality of the computed results and the computing time required for the model evaluation. Thereby, large model evaluation times typically correspond with a high result quality. For the case of FEM computations in the frequency domain, different models can be applied to different frequency bands. Thus, if different models are available for one task, every model can be applied to that frequency domain in which it is capable of computing a sufficient result with the highest efficiency. This is the approach of the following work.

The following work presents a Multi-Model procedure specifically designed for applications in acoustics. The procedure aims to solve a computation task using models of different complexity together. Thereby, the solution of a reference model is approximated. The reference model is capable of computing the result with the required accuracy in the entire frequency domain. The procedure applies the models of reduced complexity in that frequency bands where they are proven to be applicable. The procedure consists of a validation process that is capable of assessing the reduced models with low computational effort and a budget planning procedure to allow computation time savings.

The developed procedure is verified for different test cases, each case focuses on one stage in the model generation process. The reduced models are derived from the reference model on these stages, i.e. the reality model, the mathematical and

the numerical model. In this thesis, it is demonstrated that the procedure performs best using reduced models that are derived by varying the discretization, i.e. the numerical model. Furthermore, it can be shown that the quality of the approximation of the solution is coupled to the computational effort. Thus, the procedure allows the trade-off between a coarse but fast solution, or an accurate solution with low time savings.

The procedure then is applied to stochastic evaluations with the Monte Carlo method and the variance-based global sensitivity analysis. It can be shown that for these applications even higher time savings are possible, as the required validation processes of the reduced models are necessary only during the first computation. Analogously to the verification examples, the quantities of interest, i.e. the statistical moments and the sensitivity coefficients, are estimated with low errors using the developed procedure. With the presented Multi-Model procedure, an approach to reduce the computational costs of FEM-computations in the frequency domain is available. The procedure accounts for the special requirements of computations with discretization methods of wave-based problems and thus is especially suitable for applications in acoustics.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Der Modellbegriff	2
1.2. Numerische Berechnungsverfahren in der Akustik	8
1.3. Motivation und Ziel der Arbeit	11
1.4. Aufbau der Arbeit	16
1.5. Beitrag der Dissertation zum Stand der Forschung	17
2. Stand der Technik	19
2.1. Die Finite-Elemente-Methode	19
2.1.1. Grundlagen der Finite-Elemente Methode	20
2.1.2. Randbedingungen einer FEM-Berechnung	24
2.1.3. Transformation in den Frequenzbereich	24
2.1.4. Anwendungsgebiete der FEM in der Akustik	25
2.2. Beschleunigung von FEM-Berechnungen	33
2.2.1. Algorithmen zur Lösung des FEM-Gleichungssystems	34
2.2.2. Parallelisierung der Berechnung	35
2.2.3. Verfahren der Modellreduktion	35
2.2.4. Adaptive Anpassung der Diskretisierung	37
2.2.5. Multi-Level- und Multi-Fidelity-Verfahren	39
2.3. Stochastische Berechnungsverfahren	41
2.3.1. Verfahren der Unsicherheitsquantifizierung	42
2.3.2. Verfahren der Sensitivitätsanalyse	45
3. Entwicklung des Multi-Modell-Verfahrens	51
3.1. Die Idee des Verfahrens	51
3.2. Anforderungen an das Verfahren	54
3.3. Anforderungen an die Modelle	56
3.4. Stetigkeit des berechneten Frequenzgangs	57
3.5. Die Konstruktion der Modell-Management-Strategie	57
3.5.1. Das Konzept der Frequenzgruppen	58
3.5.2. Die Validierung an den Testpunkten	60
3.5.3. Modell-Management-Strategie und Budgetplanung	65
3.5.4. Verfahren zur Verkürzung des Validierungsprozesses	75
3.5.5. Algorithmische Umsetzung der Modell-Management-Strategie	79
3.6. Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung	83

4. Verifikation des Multi-Modell-Verfahrens für einzelne Berechnungen	85
4.1. Variation des numerischen Modells	88
4.1.1. Variation der Diskretisierung	89
4.1.2. Nutzung analytischer Lösungen	99
4.2. Variation des mathematischen Modells	104
4.2.1. Variation der Elementformulierung	104
4.2.2. Variation des Materialmodells	111
4.3. Variation des Realitätsmodells	118
4.4. Untersuchungen zu den Eigenschaften des Verfahrens	124
4.4.1. Einfluss der Anzahl vereinfachter Modelle	126
4.4.2. Einfluss der wahrscheinlichkeitsbasierten Abbruchentscheidung	128
4.4.3. Einfluss des gewählten Validierungskriteriums	130
4.4.4. Einfluss des zulässigen Fehlers an den Testpunkten	134
4.5. Fazit der Verifikationsuntersuchungen	135
5. Anwendung des Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung	141
5.1. Modellbeschreibung	142
5.1.1. Geometriemodell und verwendete Diskretisierung	143
5.1.2. Modellparameter	144
5.2. Unsicherheitsquantifizierung mit der Monte Carlo-Methode	147
5.3. Varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse	150
5.4. Fazit der Anwendung zur Unsicherheitsquantifizierung	155
6. Zusammenfassung	159
7. Ausblick	165
Literaturverzeichnis	169
Abbildungsverzeichnis	179
Tabellenverzeichnis	181
A. Inverse Materialparameterbestimmung poröser Materialien	183
A.1. Messungen im Impedanz- und Transmissionsrohr	183
A.2. Bestimmung der Materialparameter für das äquivalente Fluid	184
A.3. Bestimmung der Materialparameter des Biot-Modells	185
B. Erweiterung der elPaSo-Eingabedatei	189
B.1. Beispiel der Erweiterung	189
B.2. Parameter zur Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens	190
B.3. Attribut-Werte der XML-Struktur	191
C. Verifikationsrechnungen ohne Parallelisierung	193
D. Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung	201

Symbolverzeichnis

Skalare Größen (lateinische Symbole)

Symbol	Bezeichnung	Einheit
A	Fläche	m^2
a, b	Ordnung der Eigenfunktion (x-/ y-Richtung)	–
B	Budget	s
\mathcal{B}	Körper	–
c	Schallausbreitungsgeschwindigkeit	m/s
d	Wandstärke / Dicke eines Bauteils	m
E	Elastizitätsmodul	N/s^2
f	Frequenz	$\text{Hz} = 1/\text{s}$
F	Punktkraft	N
g	Zählvariable, iteriert über Frequenzgruppen	–
G	Mittelwert der Modellauswertungen, Daten aus \mathbf{U}	modellabhängig
h	Admittanz (Mobilität)	$\text{m}/(\text{N s})$
j	imaginäre Einheit, $j = \sqrt{-1}$	–
k	Wellenzahl	$1/\text{m}$
K	Kompressionsmodul des akustischen Fluids	$\text{kg}/(\text{m s}^2)$
l	Abmessung des Berechnungsgebiets	m
L	Pegel einer Größe	dB
\mathcal{M}	Abbildungsfunktion / Modellfunktion	modellabhängig
n_f	Anzahl Frequenzstützstellen	–
n_t	Anzahl der Testpunkte	–
n_g	Anzahl Frequenzgruppen	–
N	Anzahl Monte Carlo-Simulationen	–
p	Schalldruck	$\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$
P	Schallleistung	$\text{W} = \text{J/s}$
q	Zählvariable, iteriert über alle Modelle	–
Q	Anzahl aller zur Verfügung stehenden Modelle	–

Skalare Größen (lateinische Symbole), Fortsetzung

Symbol	Bezeichnung	Einheit
r	Radius (Kugel / Halbkugel)	m
R_S	Spezifische Gaskonstante von Luft	J/(kg K)
\mathcal{R}	Schalldämm-Maß	dB
S	Sensitivitätskoeffizient	wertabhängig
\mathcal{S}	Oberfläche des Körpers \mathcal{B}	m ²
t	Zeit	s
T	Absolute Temperatur	K
u	Anzahl der Eingangsgrößen des Modells	–
v	Schall- / Schwingschnelle	m/s
$\check{x}, \check{y}, \check{z}$	Koordinaten eines Ortes im \mathbb{R}^3	m
x_1, \dots, x_u	Eingangsgrößen, Elemente des Vektors \boldsymbol{x}	modellabhängig
X	Messebene für den Schalldruckpegel	–
Y	Ausgangsgröße der Modellfunktion	modellabhängig
Z	Impedanz	N s/m

Skalare Größen (griechische Symbole)

Symbol	Bezeichnung	Einheit
α	Tortuosität des porösen Materials	–
β	Elementkantenlänge der Diskretisierung	m
γ	Anteil Frequenzgruppen, Validierung erfolglos	–
Γ	Zu minimierende Zielgröße der Optimierung	modellabhängig
δf	Frequenzauflösung des Frequenzgangs	Hz
Δx_i	Variation der Eingangsgröße x_i	wertabhängig
ΔY_i	Differenz der Systemantworten an Testpunkt f_i^t	modellabhängig
ϵ	Exponent der Pegelbildung	–
ζ	Federsteifigkeit	N/m
η	Verlustfaktor	–
θ	Kosten eines Modells	s
Θ	Teilkosten des Multi-Modell-Verfahrens	s
κ	Adiabatenexponent	–
λ	Wellenlänge	m
Λ	Charakteristische Länge der Porengeometrie	m
μ	Mittelwert	wertabhängig
ν	Poisson-Zahl	–
ξ	Zufallsvariable (Fortsetzung der Validierung)	–
Ξ	Strömungswiderstand (spezifisch)	N s/m ⁴
Π	Validierungskriterium	wertabhängig
ρ	Dichte des Mediums	kg/m ³
σ	Standardabweichung	wertabhängig
τ	Transmissionsgrad	–
ϕ	Porosität	–
φ	Raumwinkel	rad
Φ	Anteil eines Modells an der Lösung	–
ψ	Physikalische Größe	wertabhängig
Ψ	Fehlermaß der Systemantwort	dB
χ	Ersparnis	s
ω	Kreisfrequenz	rad/s
Ω	Erregerkreisfrequenz	rad/s

Vektoren und Matrizen

Symbol	Bezeichnung
\mathbf{f}	Äußere Lasten auf dem Körper \mathcal{B}
\mathbf{i}	Vektor der Luftschall-Intensität
\mathbf{r}	Summe aller äußeren Lasten (diskretisiertes System)
$\mathbf{r}^{\mathcal{B}}$	Vektor der Volumenkräfte
\mathbf{r}^C	Vektor der äußeren Punktlasten
\mathbf{r}_i^C	Vektoren äußerer Punktlasten an den Orten i
\mathbf{r}^I	Vektor der Spannungen im Element (unbelastet)
\mathbf{r}^S	Vektor der Oberflächenkräfte
\mathbf{u}	Vektor der Verschiebungen
\mathbf{x}	Vektor der Eingangsgrößen
$\boldsymbol{\epsilon}$	Vektor der Verzerrungen
$\boldsymbol{\tau}$	Vektor der Spannungen
\mathbf{A}	Systemmatrix, i. Allg. frequenzabhängig $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\omega)$
\mathbf{B}	Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix
\mathbf{C}	Element-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{D}	Globale Dämpfungsmatrix
\mathbf{H}	Verschiebungs-Interpolationsmatrix
\mathbf{K}	Globale Steifigkeitsmatrix
\mathbf{M}	Globale Massenmatrix
\mathbf{T}	Reduktionsmatrix im Rahmen der Modellreduktion
\mathbf{U}	Eingangsgrößen (Matrix 1) der globalen Sensitivitätsanalyse
\mathbf{V}	Eingangsgrößen (Matrix 2) der globalen Sensitivitätsanalyse
\mathbf{W}_i	Spaltenweise Kombination der Matrizen \mathbf{U}, \mathbf{V}

Mathematische Operatoren

Symbol	Bezeichnung
err	Fehlerterm
$[\dots]^T$	Transponierte einer Matrix / eines Vektors
Δ	Laplace-Operator $\Delta = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}$
$\mathbb{E}[\dots]$	Operator für den Erwartungswert
$\mathbb{V}[\dots]$	Operator für die Varianz

Tiefgestellte Indizes

Index	Verwendung
0	Bezugswert zur Bildung von Pegeln, z.B. p_0 , P_0 , v_0
0	Luftschallkennimpedanz Z_0
0	Grenzwert der Tortuosität, $\lim_{f \rightarrow 0} \alpha_0$
0	Dichte von Luft unter Normbedingungen ρ_0
1	Haupteffekt / Sensitivitätskoeffizient erster Ordnung S_1
a, b	Ordnungszahlen in x- und y-Richtung der Eigenfunktionen
Absth.	Materialparameter des Abstandshalters
B	Biegewellenlänge λ_B
cut-on ₁	Cut-on Frequenz der ersten, nicht ebenen ausbreitungsfähigen Mode
d	Phasenentkopplungsfrequenz f_d des porösem Materials
ein	Auftreffende Schallleistung P_{ein}
eq	Äquivalente Größen im porösen Material, z.B. ρ_{eq} , c_{eq}
fern	Schalldruck im Fernfeld p_{fern}
F	Ort der Erregerkraft $\tilde{x}_F, \tilde{y}_F, \tilde{z}_F$
Gas	Schallgeschwindigkeit im Gasvolumen
$\sim i$	Vektor der Eingangsgrößen $\mathbf{x}_{\sim i}$, alle Größen außer x_i variiert
L	Longitudinalwellenlänge λ_L
Luft	Materialparameter in Luft
max	Obere Frequenzgrenze f_{max} einer Frequenzgruppe
min	Untere Frequenzgrenze f_{min} einer Frequenzgruppe
q	Größe der q -ten Modells, z.B. Kosten θ_q , Anteil Φ_q
R	Reduzierte Größen bei Modellreduktion
Scheibe	Materialparameter der Scheiben
Skelett	Materialparameter des Skeletts
Struktur	Impedanz / Admittanz in Strukturen
trans	Transmittierte Schallleistung P_{trans}
T	Totaler Sensitivitätskoeffizient S_T
x	Kantenlänge einer schallabstrahlenden Fläche in x-Richtung l_x
x	Raumwinkel um die x-Achse φ_x
y	Kantenlänge einer schallabstrahlenden Fläche in y-Richtung l_y
y	Raumwinkel um die y-Achse φ_y
Wand	Fläche der Wand A_{Wand}
Rohr	Rohrradius des Schalldämpfers r_{Rohr}

Tiefgestellte Indizes, Fortsetzung

Index	Verwendung
v	Viskose charakteristische Länge der Porengeometrie Λ_v
v	Ort der Schnellemessung $\check{x}_v, \check{y}_v, \check{z}_v$
t	Thermale charakteristische Länge der Porengeometrie Λ_t
∞	Grenzwert der Tortuosität, $\lim_{f \rightarrow \infty} \alpha_\infty$
\mathbf{U}	Ergebnisgröße $Y_{\mathbf{U}}$ bei Verwendung der Daten in \mathbf{U}
\mathbf{V}	Ergebnisgröße $Y_{\mathbf{V}}$ bei Verwendung der Daten in \mathbf{V}
\mathbf{W}_i	Ergebnisgröße $Y_{\mathbf{W}_i}$ bei Verwendung der Daten in \mathbf{W}_i

Hochgestellte Indizes

Index	Verwendung
BC	Validierungskriterium Π^{BC} , Metrik: Bhattacharyya-Koeffizient
ED	Validierungskriterium Π^{ED} , Metrik: einfache Differenz
EPD	Validierungskriterium Π^{EPD} , Metrik: einfache Pegeldifferenz
FG	Gesamtkosten Θ^{FG} zur Ermittlung der Frequenzgruppen
g	Größe der g -ten Frequenzgruppe, z.B. $n_f^g, f_{\min/\max}^g$
ges	Anzahl Frequenzstützstellen im Frequenzbereich insgesamt n_f^{ges}
i	Sensitivitätskoeffizient der i -ten Eingangsgröße $S_{1/T}^i$
I	Im unbelasteten Zustand vorliegende Lasten
KS	Ermittlung der Kosten der aller Modelle Θ^{KS}, n_f^{KS}
log	Parameter der Log-Normalverteilung $\mu^{\log}, \sigma^{\log}$
L	Gesamtkosten Θ^L der Berechnung mit dem Multi-Modell-Verfahren
(m)	Matrix / Vektor des m -ten Elements des Körpers \mathcal{B}
MMV	Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens
MPD	Validierungskriterium Π^{MPD} , Metrik: mittlere Pegeldifferenz
$Rand$	Impedanz- / Schnelle-Randbedingung Z^{Rand}, v^{Rand}
RD	Validierungskriterium Π^{RD} , Metrik: relative Differenz
Ref	Eigenschaft des Referenzmodells, z.B. Elementkantenlänge β^{Ref}
t	Frequenz eines Testpunkts f^t
Val	Gesamtkosten Θ^{Val} für alle Validierungsprozesse
VM	Eigenschaft eines vereinfachten Modells, z.B. Elementkantenlänge β^{VM}
(\sim)	Effektivwert einer Größe
$(\cdot)'$	Amplitude einer Größe
$(\overline{})$	Virtuelle Größen
$(\hat{})$	Feldgrößen an den Knoten, z.B. Knotenverschiebung \hat{u}
$(\dot{})$	Einfache Zeitableitung
$(\ddot{})$	Zweifache Zeitableitung
–	Anzahl Frequenzgruppen, nicht erfolgreicher Validierungsprozess, n_g^-

Häufig verwendete Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
BEM	Randelemente-Methode, engl.: Boundary-Element Method
DOE	Design of Experiments
FEM	Finite-Elemente-Methode
FHG	Freiheitsgrad
HDMR	high-dimensional model representation
MCS	Monte Carlo-Simulation
MMS	Modell-Management-Strategie
MMV	Multi-Modell-Verfahren
MOR	Modellordnungsreduktion, kurz: Modellreduktion
PCE	Polynomial Chaos Expansion
SEA	Statistische Energieanalyse

1. Einleitung

In der heutigen, industrialisierten Welt ist Lärm, also als störend wahrgenommener Schall, ein den Menschen täglich umgebendes Phänomen mit beträchtlichen negativen gesundheitlichen Folgen. In einem Bericht der World Health Organisation (WHO) aus 2011 wird der gesundheitliche Schaden durch Umgebungslärm in DALYs¹ beziffert. Danach gehen allein aufgrund von Verkehrslärm in Westeuropa jedes Jahr mehr als eine Million in Gesundheit verbrachter Lebensjahre verloren [56]. Aufgrund dieses immensen gesellschaftlichen Einflusses hat die Untersuchung von Lärm und allgemeiner, von Schall einen zunehmend wichtigen Stellenwert.

CHLADNI gibt in seinem Buch von 1802 eine Definition von Schall und der Akustik als Lehre vom Schall: „*Hörbare Schwingungen eines elastischen Körpers nennt man einen Schall. Die Akustik ist die Lehre von Schalle.*“ [33, Einleitung, Abschn. 4]. Auch die Teildisziplinen der Akustik seiner Zeit benennt CHLADNI, dies sind *Tonlehre*, *Schwingungsgesetze*, *Verbreitung des Schalls* und die *Empfindung* von Schall. Als Tonlehre beschreibt CHLADNI die Untersuchung der Frequenzverhältnisse von reinen Tönen und liefert mit der Benennung von Intervallen einen Beitrag zur quantitativen Beschreibung von akustischen Ereignissen im Frequenzbereich. Mit dem Bereich der Schwingungsgesetze wird die Untersuchung des Schwingungsverhaltens elastischer Körper zusammengefasst. Der dritte Bereich der Akustik ist nach CHLADNI die Beschreibung der Schallausbreitung, die Wirkung von Schall auf den Menschen beschreibt er mit dem Oberbegriff der Empfindung. Damit gibt CHLADNI eine Definition der Akustik, welche bis heute Bestand hat (vgl. bspw. [85, S. 1]).

In der Entwicklung technischer Produkte rückt die Akustik mehr und mehr in den Fokus. Einerseits führen stetig sinkende Grenzwerte für die Schallemission von Produkten zu neuen Herausforderungen, andererseits nimmt das Qualitätsbewusstsein der Kunden stetig zu [127]. Die Akustik wird zu einem Qualitätsmerkmal. Dabei kann Qualität im Sinne eines leisen Produkts, aber auch im Sinne eines Produkts mit einem gewünschten Klang verstanden werden. Nicht zuletzt aufgrund der fortschreitenden Globalisierung steigt der Druck auf Unternehmen sich am Markt zu behaupten. Die Steigerung der Produktqualität sowie die Reduktion der „Time-to-Market“, also die zeitliche Verkürzung des Produktentwicklungsprozesses, werden vielfach als Antworten auf den zunehmenden Druck benannt [114, 125]. Daher wird die Akustik von Produkten, im Sinne einer akustischen Qualität, zusätzlich zu einem ökonomisch relevanten Faktor.

¹disability-adjusted life year (DALY), deutsch: durch frühzeitigen Tod verlorenes oder durch Krankheit beeinträchtigtes Lebensjahr

Sowohl der ökonomische Aspekt der Akustik, viel mehr noch der physiologisch-ethische Aspekt des Lärms, fordert die Entwicklung akustisch günstiger Produkte heraus. Die Akustik wird zu einer Anforderung an Produkte. Eine diesen Anforderungen gerecht werdende Produktentwicklung setzt heute auf den konsequenten Einsatz computergestützter Methoden. Dazu zählen beispielsweise das *Computer-Aided Design* sowie die, unter dem Begriff *Computer-Aided Engineering* zusammengefasste, Gruppe der computergestützten Berechnungsverfahren [114, 125]. Diese Verfahren erzeugen Repräsentationen der Produkte im Computer mit dem Ziel, die Eigenschaften der Produkte zu prognostizieren und noch vor Beginn der Fertigung physischer Prototypen optimieren zu können. Diese Repräsentationen werden als Modelle bezeichnet. Modelle und ihre Beziehung zu dem modellierten Objekt sind zentraler Bestandteil der vorliegenden Arbeit, daher wird nachfolgend auf den Modellbegriff, den Prozess der Modellbildung und die Rolle von Modellen in der numerischen Berechnung in der Akustik ausführlich eingegangen.

1.1. Der Modellbegriff

Modelle werden in allen Wissenschaften eingesetzt. Eine erkenntnistheoretische Begründung für den umfassenden Einsatz von Modellen liefert STACHOWIAK mit dem *Modellkonzept der Erkenntnis*, wonach „[...] alle Erkenntnis Erkenntnis in Modellen oder durch Modelle [...]“, [118, S. 56] ist. In diesem Sinne kann das Lernen über das Wesen der Welt nur anhand von Modellen erfolgen. Nachfolgend werden Gründe für diese Haltung diskutiert, zunächst werden die wesentlichen Eigenschaften von Modellen vorgestellt. Weiterhin wird die Definition für Modelle abgeleitet, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit Verwendung findet.

Nach STACHOWIAK [118] hat das Wort Modell vier Bedeutungen. Modelle sind demnach *Abbild von etwas*, *Vorbild für etwas* und *Repräsentation eines bestimmten Originals*. Die vierte Bedeutung geht auf das Modell in der Kunst ein. Zu jedem Modell existiert somit ein Original, dessen Eigenschaften durch das Modell abgebildet werden. Das Modell kann somit eine Ersetzungsfunktion für das Original übernehmen. Der Autor geht dabei nicht auf die Herkunft oder die Eigenschaften dieses Originals ein. Die Herkunft des Originals wird im Folgenden anhand der Sichtweise des Konstruktivismus betrachtet. Die Abbildungs- und Ersetzungsfunktion des Modells wird nach STACHOWIAK durch die Merkmale *Abbildungsmerkmal*, *Verkürzungsmerkmal* sowie das *Pragmatische Merkmal* bestimmt [118, S. 131-133]:

Abbildungsmerkmal Das Abbildungsmerkmal beschreibt den Umstand, dass Modelle Attribute eines Originals aufweisen. Attribute sind in diesem Fall Eigenschaften, Merkmale und Relationen. Die Abbildung, im Sinne einer Zuordnung, ermöglicht es von dem Verhalten des Modells auf das Verhalten des durch das Modell nachgebildeten Originals zu schließen. Dieser Aspekt ist zentral für die Nutzung von Modellen im Rahmen des Modellkonzepts der Erkenntnis.

Verkürzungsmerkmal Das Verkürzungsmerkmal beschreibt die Eigenschaft von Modellen, nur über eine Teilmenge der Attribute des zugehörigen Originals zu verfügen. Modelle enthalten Vereinfachungen, die durch das bewusste oder unbewusste Vernachlässigen von Eigenschaften des Originals erzielt werden.

Pragmatisches Merkmal Das Pragmatische Merkmal beschreibt die nicht eindeutige Zuordnung zwischen Original und Modell. Danach erfüllen Modelle die Repräsentation des Originals nur unter Berücksichtigung ihres Zwecks. In diesem Merkmal steckt die Idee, dass Modelle für bestimmte Zwecke geschaffen werden und auch nur für diesen Zweck verwendet werden können. Abhängig von dem Zweck können somit für ein Original beliebig viele Modelle erzeugt werden.

Eine dem Modellkonzept der Erkenntnis analoge Begründung für die Notwendigkeit von Modellen sieht HACKING in der Idee der Artikulation wissenschaftlicher Theorien. Danach ist es Aufgabe von Modellen, komplexe Theorien für das menschliche Bewusstsein greifbar und mit bekannten mathematischen Hilfsmitteln beschreibbar zu machen [64]. Mit dieser Sichtweise folgt HACKING der konstruktivistischen Auffassung, dass die Realität eine nicht direkt erfahrbare Größe ist, sondern nur in Form von Modellen und Abbildern erfahrbar und damit auch kommunizierbar wird. Modelle ermöglichen somit *Kommunikation über die Realität*. Dies ist der Kern der Antwort auf die Frage, warum Modelle erforderlich sind und warum Erkenntnis über die Realität nur anhand von Modellen gewonnen werden kann. Dass HACKING in seinen Ausführungen den Begriff der *Theorie* verwendet ist insofern kompatibel mit der Übersetzung in Realität, als dass HACKING sich selbst als Vertreter des (wissenschaftlichen) *Realismus* beschreibt. Der Realismus geht davon aus, dass wissenschaftliche Theorien grundsätzlich richtig oder falsch sind. Für den Fall, dass eine Theorie als richtig betrachtet wird, begreift der Realismus die Theorie als identisch mit der Realität und somit als *Wahrheit* [64]. Demgegenüber betrachtet der *Anti-Realismus* Theorien lediglich als nützliche Hilfsmittel zur Beschreibung der Welt. Sie dienen dazu *Phänomene* zu erklären und vorherzusagen. Aus ihnen lässt sich jedoch nicht ableiten, dass die Welt tatsächlich so ist, wie sie von der Theorie beschrieben wird.

Das Ziel, Erkenntnis über die Eigenschaften der Realität zu erlangen oder über die Realität zu kommunizieren, wirft die Frage nach dem Wesen der Realität selbst auf. Es stellt sich die Frage, was *die Realität* eigentlich ist und in welchem Zusammenhang sie mit Modellen und deren Abbildungseigenschaften dieser Realität steht. Eine philosophische Strömung, die sich mit der Frage nach dem Wesen der Realität und der Verbindung des Menschen zu dieser Realität beschäftigt ist der Konstruktivismus [72, S. 170f].

Bereits DESCARTES teilt die Welt dualistisch in eine Innenwelt (*res cogitans*) und eine Außenwelt (*res extensa*) [41]. Die Außenwelt ist die tatsächlich vorhandene Welt, die Realität in der alles existiert. Das Instrument zur Erkenntnis dieser, in der Außenwelt liegenden, Realität ist die Wissenschaft [72]. Sie verfolgt das Ziel Naturgesetze, also wahre Aussagen über das Wesen der Realität, zu formulieren. Nach POPPER

ist es jedoch nicht möglich, für Naturgesetze Wahrheitsbeweise zu führen. Deshalb bedient sich die Wissenschaft der Falsifikationsmethode. Dabei werden Hypothesen über die Eigenschaften der Realität formuliert. Die Hypothesen werden auf die Probe gestellt und, solange kein Gegenbeweis gefunden wird, als wahre Aussagen über die Eigenschaften der Realität beibehalten. POPPER nennt solche, nicht widerlegte, Hypothesen *bewährt*² [106, 107].

Eine Begründung für die nicht mögliche Beweisführung über den Wahrheitsgehalt von Naturgesetzen liefert der Konstruktivismus. Danach können Aussagen ausschließlich über die, durch einen Beobachter durch Beobachtungen rezipierte, Realität getroffen werden [106]. Der Vorgang der Beobachtung wiederum ist eine kognitive Operation, also eine geistige Handlung. Deshalb führt jede Beobachtung der Realität nicht zu einer Erkenntnis der Realität selbst, sondern zur Konstruktion eines Abbilds der Realität [72, 106]. LOCKE bezeichnet diesen, in der konstruierten Realität entstehenden, Eindruck von Dingen der Realität als *idea* [20, 88]. Diese konstruierte, oder kognitive Realität ist ein Abbild der tatsächlichen Realität und liegt im Sinne der dualistischen Sichtweise von DESCARTES in der Innenwelt. Sie ist beobachterabhängig und somit subjektiv. Diese unlösbare Aufgabe, aus in der Innenwelt stattfindenden Beobachtungen auf die Eigenschaften der Außenwelt zu schließen, wird auch als das *kartesische Gefängnis* bezeichnet [20]. Das bei STACHOWIAK als Original bezeichnete Objekt, über dessen Eigenschaften mittels eines Modells Erkenntnis gewonnen werden soll, ist somit an sich nicht die Realität und auch kein Teil von dieser. Vielmehr handelt es sich um einen Ausschnitt dieser konstruierten, kognitiven und vom Beobachter abhängigen Realität. Dieses, in der konstruierten Realität existente Original, hat, entsprechend der Modelldefinition nach STACHOWIAK, selbst bereits Modellcharakter. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird dieses Original daher als *Realitätsmodell* bezeichnet. Als Repräsentation des tatsächlich in der Realität existenten Objekts hat das Original, also das Realitätsmodell, einen Abbildungscharakter. Weiterhin wird das Realitätsmodell durch einen Beobachter konstruiert. Dieser Konstruktionsprozess ist verkürzend, da ein Beobachter nur Teile der Realität rezipiert und somit nur ein unvollständiges Realitätsmodell konstruiert. Das Realitätsmodell ist somit im Vergleich³ mit dem tatsächlichen, realen Objekt, unvollständig. Ein pragmatisches Merkmal erhält das Realitätsmodell dadurch, dass jeder mögliche Beobachter aufgrund seiner individuellen Perspektive andere Erfahrungen macht und somit jeder Beobachter ein individuelles Realitätsmodell konstruiert. Die Zuordnung eines Realitätsmodells zu der Realität ist somit nur unter Berücksichtigung des zugehörigen Beobachters möglich, da dieser Beobachter es für den Zweck seiner Realitätswahrnehmung erschafft.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die folgende Definition eines Modells verwendet. Die Definition ist an die in [28, S. 5] von BUNGARTZ angegebene Modelldefinition angelehnt und erweitert diese um das pragmatische Merkmal nach STACHOWIAK sowie das auf dem Konstruktivismus basierende Konzept des Realitätsmodells.

²In [9, 106] englisch: *corroborated*, zu deutsch: bewährt

³Dieser Vergleich kann ausschließlich hypothetischer Natur sein, da er nicht tatsächlich durchgeführt werden kann.

„Ein Modell ist ein vereinfachendes Abbild eines Teils der durch einen Beobachter rezipierten Realität. Es wird mit dem Ziel der Kommunikation über die Realität geschaffen.“

Ein wesentliches Ziel der Arbeit von Ingenieuren/innen ist der Gewinn von Erkenntnissen über das Verhalten der von ihnen geschaffenen technischen Systeme. Zu diesem Zweck erstellen Ingenieure/innen Modelle dieser technischen Systeme und gewinnen anhand dieser Modelle die gewünschten Erkenntnisse. Wie erwähnt, ermöglichen Modelle Kommunikation über die durch sie abgebildete Realität (bzw. der implizit konstruierten Realitätsmodelle) der technischen Systeme. Offen ist die Festlegung der Sprache. Als allgemeine, und in den Naturwissenschaften gängige, Sprache wird häufig die Mathematik verwendet. Aus den Realitätsmodellen werden abstrakt-mathematische Modelle abgeleitet. Aber auch physisch fassbare Modelle, wie gefertigte Prototypen, sind als Modelle zu verstehen. Diese Modelle dienen beispielsweise dem Erkenntnisgewinn über, zum Teil subjektive, Größen wie Design, Erscheinung und Haptik. Sie verwenden eine Formensprache. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstellten Modelle sind stets abstrakt-mathematischer Natur. Ziel der Erzeugung dieser Modellklasse ist es, Eigenschaften des Realitätsmodells zu berechnen. Im Folgenden wird nur noch auf diese Teilmenge aller Modelle eingegangen. Sie werden als *mathematische Modelle* bezeichnet. Aufgrund der Komplexität der verwendeten Mathematik werden, aufbauend auf dem mathematischen Modell, weitere Modelle erzeugt, welche die Lösung der verwendeten mathematischen Gleichungen in einem Computer ermöglichen. Der gesamte Prozess der Ableitung eines Modells aus einer dem Realitätsmodell entstammenden Fragestellung bis zur Lösung der Gleichungen in einem Computer wird als *Modellbildung* oder *Modellierungsprozess* bezeichnet. Ausführliche Darstellungen des Modellierungsprozesses geben beispielsweise [13, 74].

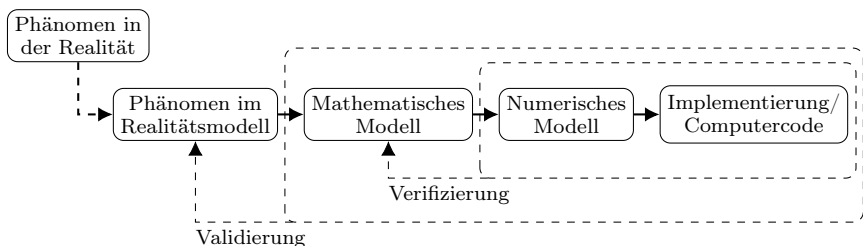


Abbildung 1.1.: Der Modellierungsprozess zur Berechnung der Phänomene einer rezipierten Realität mittels numerischer Berechnungen, Kombination aus [9, 13, 72]

Abbildung 1.1 zeigt den Modellierungsprozess schematisch und orientiert sich an den Ausführungen in [9, 13]. In [9] wird die Modellierungsaufgabe eines physika-

lischen Phänomens („event“)⁴ in der Realität betrachtet. Entsprechend der vorherigen Ausführungen zum Verhältnis von Realität und Realitätsmodell wird in Abbildung 1.1 zwischen dem *Phänomen in der Realität* und dem *Phänomen im Realitätsmodell* unterschieden. Das Phänomen in der Realität ist das, was tatsächlich stattfindet. Das Phänomen im Realitätsmodell wird durch einen Beobachter rezipiert und modelliert. Die Verbindung zwischen diesen Ebenen ist durch einen gestrichelten Pfeil dargestellt, um die Beobachterabhängigkeit und die daraus folgende Subjektivität zu kennzeichnen. Dieses, durch den Beobachter als Realitätsmodell rezipierte Phänomen, wird mittels mathematischer Gleichungen beschrieben. Das Ergebnis dieser Beschreibung ist das *mathematische Modell*. Im Unterschied zu dem modellierten Phänomen, welches berechnet werden soll, ist das mathematische Modell dasjenige Modell, welches berechnet wird [13]. Die für die Konstruktion des mathematischen Modells verwendeten Gleichungen sind zumeist partielle Differentialgleichungen. Die Lösung dieser Gleichungen erfolgt mittels numerischer Methoden, dazu erfolgt die Überführung in das *numerische Modell*. Für diesen Prozess wird eine geeignete Berechnungsmethode gewählt. Die Berechnungsmethode überführt die partiellen Differentialgleichungen in Systeme algebraischer Gleichungen. Dieser Prozess hängt maßgeblich von der eingesetzten Methode ab. Während beispielsweise Finite-Differenzen-Verfahren die Ableitungen der partiellen Differentialgleichungen mittels finiter Differenzenquotienten approximieren, verwendet die Finite-Elemente-Methode (FEM) eine Approximation der Lösung auf einem kleinen örtlichen Gebiet. Das entstehende System algebraischer Gleichungen ist das numerische Modell [13, 21]. Die Lösung des numerischen Modells erfolgt typischerweise mit Computern, daher ist der letzte Schritt die Überführung des numerischen Modells in *Computercode*. Durch Verwendung von Lösungsalgorithmen für die entstehenden Gleichungssysteme werden die gesuchten Größen des numerischen Modells ermittelt. Diese sind, im Sinne der oben genannten Definition, ein Abbild der in der Realität auftretenden Größen.

Entsprechend der Modelltheorie von STACHOWIAK und der konstruktivistischen Subjektivität des Realitätsmodells ist der in Abbildung 1.1 dargestellte Ablauf nicht deterministisch. Ein und das selbe Phänomen kann zu beliebig vielen möglichen Modellen und somit Berechnungsergebnissen führen. Eine Entscheidung darüber, welches der möglichen Modelle „richtig“, im Sinne als identisch mit der Realität, ist kann nicht getroffen werden. Im Sinne der Logik kann höchstens ein Modell tatsächlich richtig sein. Aus Sicht des Realismus enthielte dieses richtige Modell wahre Aussagen bezüglich der Realität. Dies ist nicht Anspruch der vorliegenden Arbeit. Vielmehr wird im Rahmen dieser Arbeit eine anti-realistische Sichtweise vertreten. Die anhand von Modellen erzielten Erkenntnisse sind, unabhängig von dem verwendeten Modell, zunächst Beschreibungen des Realitätsmodells des jeweiligen Beobachters. Sie erklären die Realität nicht, sondern dienen nur der Analyse und Prognose der beobachteten Phänomene. Alle Modelle, deren Aussagen mit den Beobachtungen vereinbar sind, sind gleichermaßen gültig. Sie „retten erfolgreich die

⁴Der in [9] verwendete Begriff „event“ (deutsch: Ereignis) wird hier als „Phänomen“ übersetzt, um Kongruenz mit den Ideen von VAN FRAASSEN [126] herzustellen.

Phänomene“ [126, S. 12], wie VAN FRAASSEN es nennt. Die Beantwortung der Frage, ob die eingesetzten Modelle tatsächlich die Phänomene retten, ist Aufgabe der *Verifizierung* und *Validierung*. In Anlehnung an [9] werden diese Prozesse wie folgt definiert, vgl. Abbildung 1.1.

Verifizierung Der Prozess der Verifizierung überprüft, ob das aus dem mathematischen Modell abgeleitete numerische Modell sowie der daraus abgeleitete Computercode das mathematische Modell korrekt beschreiben.

Validierung Im Rahmen der Validierung wird überprüft, ob die Ergebnisse der Berechnung, die mittels mathematischem und numerischem Modell sowie dem daraus abgeleiteten Computercode erzielt werden, mit den beobachteten Phänomenen vereinbar sind.

Der Prozess der Verifizierung prüft somit die Umsetzung der Modelle, hinsichtlich der Verwendung numerischer und informatischer Methoden, formal auf Richtigkeit. Demgegenüber wird während der Validierung überprüft, ob beobachtete Phänomene korrekt durch die Modelle abgebildet werden. Die beobachteten Phänomene, also die Referenzgrößen der Validierung anhand derer validiert wird, werden wiederum aus Modellen gewonnen. Von diesen Referenzmodellen wird vermutet, dass sie eine höherwertigere Abbildung der Realität ermöglichen als das zu validierende Modell. Häufig werden dazu Messergebnisse herangezogen. Aber auch höherwertige abstrakte Modelle, deren Verkürzungsmerkmal geringer ausgeprägt ist und die somit über mehr Merkmale des modellierten Originals verfügen, können verwendet werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden für eine Berechnungsaufgabe zusätzlich zu einem Referenzmodell vereinfachte Modelle verwendet. Von dem Referenzmodell wird eine genügende Abbildungsqualität der rezipierten Phänomene erwartet. Die vereinfachten Modelle werden unter Nutzung des, von STACHOWIAK postulierten, pragmatischen Merkmals von Modellen erzeugt. Sie werden für einen bestimmten Zweck geschaffen. Jedes der vereinfachten Modelle rettet nicht alle, sondern nur eine Teilmenge aller, durch das Referenzmodell berücksichtigten, Phänomene. Sie erfordern, aufgrund des ausgeprägteren Verkürzungsmerkmals, häufig weniger Aufwand zur Berechnung von Ergebnissen. Die vereinfachten Modelle werden gegen das Referenzmodell validiert. Sofern die Validierung des vereinfachten Modells erfolgreich ist, wird das vereinfachte Modell an Stelle des Referenzmodells verwendet. Es wird somit möglich, für bestimmte Fragestellungen jeweils das am besten geeignete Modell zu verwenden. Insgesamt wird somit eine Verringerung des Aufwands zur Ermittlung eines Berechnungsergebnisses erreicht. Dieser Ansatz wird in der vorliegenden Arbeit als *Multi-Modell-Verfahren* bezeichnet und auf Berechnungsaufgaben aus dem Bereich der Akustik angewendet. Daher wird nachfolgend auf die numerische Berechnung in der Akustik eingegangen.

1.2. Numerische Berechnungsverfahren in der Akustik

Wie in nahezu allen Disziplinen des Ingenieurwesens ist auch in der Akustik die Anwendung numerischer Berechnungsverfahren etabliert. Je nach Anwendung und betrachtetem Frequenzbereich kommen unterschiedliche Verfahren zum Einsatz. In [65] werden die Finite-Elemente-Methode (FEM)⁵, die Randelemente-Methode (BEM)⁶ sowie die Statistische Energie Analyse (SEA) bereits als traditionelle Methoden genannt. Darüber hinaus existieren Verfahren der geometrischen Akustik wie Ray-Tracing und Spiegelquellenverfahren [21]. Die FEM und die BEM werden als *Diskretisierungsverfahren* bezeichnet, da während des Modellierungsprozesses zur Konstruktion des numerischen Modells das kontinuierliche Berechnungsgebiet in diskrete Elemente zerlegt wird. Die interessierenden Feldgrößen werden bei diesen Verfahren für das gesamte Berechnungsgebiet ortsabhängig berechnet. Dies ermöglicht den Diskretisierungsverfahren die Auflösung akustischer Wellen. Demgegenüber ist die SEA ein Verfahren, bei der für einzelne Subsysteme gemittelte Werte der Feldgrößen sowie Energieflüsse zwischen Subsystemen bestimmt werden [54]. Einzelne akustische Wellen werden bei diesem Verfahren aufgrund der örtlichen und zeitlichen Mittelung nicht aufgelöst. Die Verfahren der geometrischen Akustik vereinfachen die Schallausbreitung, analog zur geometrischen Optik, zu Schallstrahlen. Auch hier werden keine Wellen aufgelöst. Welleneffekte, wie Brechung und Beugung, werden von diesen Verfahren, wie auch von der SEA, vernachlässigt. Darüber hinaus existiert eine Vielzahl weiterer Verfahren. In [65] werden neuartige, hybride Verfahren, wie gekoppelte FEM-SEA-Kopplung, FEM-Transferpfad-Analyse-Kopplung oder die Energie-FEM aufgeführt. Weiterhin existieren im Bereich der Berechnung von Strömungsschall Methoden auf Basis von Strömungsberechnungsverfahren wie die Lattice-Boltzmann-Methode, die Verfahren der numerischen Aeroakustik und viele mehr. Auf diese Verfahren wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.

Häufig werden die für akustische Berechnungen zur Verfügung stehenden Berechnungsverfahren nach ihrem Einsatz im Frequenzbereich unterteilt. Die Diskretisierungsverfahren werden häufig dem niedrigen Frequenzbereich zugeordnet. Für diese Verfahren steigt, aufgrund der Diskretisierung des Berechnungsgebiets, der Berechnungsaufwand mit steigender Frequenz und damit mit abnehmender Wellenlänge stark an, da die Elementabmessungen deutlicher kleiner als die Wellenlänge sein müssen. Die Verfahren der geometrischen Akustik und die SEA lösen keine akustischen Wellen auf. Die SEA erfordert eine ausreichende Modendichte in den Subsystemen. Da die Anzahl der in einem Subsystem auftretenden Moden mit steigender Frequenz und den Abmessungen der Subsysteme zunimmt, ist die Anwendung der SEA in Richtung niedriger Frequenzen begrenzt [95]. Auch die Annahme strahlenförmiger Schallausbreitung bei den Verfahren der geometrischen Akustik führt dazu, dass die Verfahren in Richtung niedriger Frequenzen begrenzt sind. Da Schallwellen nur von Objekten, deren Abmessungen groß gegen die Wellenlänge sind, nennenswert

⁵Die FEM wird ausführlich in Abschnitt 2.1 vorgestellt.

⁶Randelemente-Methode, englisch: Boundary-Element Method, BEM

beeinflusst werden, können die Verfahren bei zu großen Wellenlängen keine verlässlichen Aussagen liefern [85]. Aus diesen Gründen werden die SEA und die Verfahren der geometrischen Akustik eher im hohen Frequenzbereich positioniert [65, 127]. Insgesamt hängt die Anwendbarkeit aller genannten Methoden von dem Verhältnis von betrachteter Wellenlänge und der Größe des Berechnungsgebiets ab.

Die Grenze zwischen dem hohen und niedrigen Frequenzbereich ist abhängig von der zu berechnenden Fragestellung und lässt sich nicht absolut angeben. Grundsätzlich ist es allerdings nur erforderlich, die während der Berechnung erzeugten Gleichungssysteme des numerischen Modells speichern und in endlicher Zeit lösen zu können. Die Grenze, ab der die Anwendung der FEM unwirtschaftlich wird, hängt damit prinzipiell nur von der Leistungsfähigkeit der verwendeten Computer und der zur Verfügung stehenden Zeit ab. In [127] wird als eine obere Schranke für die Anwendung der FEM eine Frequenz von 200 Hz genannt, für die Anwendung des SEA dagegen eine untere Grenze von 500 Hz. Der Bereich dazwischen wird von dem Autor als „Mid-Frequency-Gap“ [127, S. 336] bezeichnet. Allerdings geht der Autor von der Analyse großer Strukturen, wie Kraftfahrzeugen oder Teilen davon, aus. Die für die Größen Speicherbedarf und zur Lösung erforderliche Rechenzeit hängen, wie bereits erwähnt, maßgeblich vom Verhältnis aus Wellenlänge und Abmessung des Berechnungsgebiets ab. Daher hat sich zur praktischen Charakterisierung, bis zu welcher Grenze Diskretisierungsverfahren eingesetzt werden können, die Verwendung der dimensionslosen Kennzahl $k \cdot l$ etabliert [65, 91]. Diese Kennzahl ist das Produkt aus der Wellenzahl k und einer charakteristischen Länge l . Die charakteristische Länge charakterisiert die Ausdehnung des Berechnungsgebiets [65]. Die Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$ ist das Verhältnis aus der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$, mit der Frequenz f in Hertz, und der Schallausbreitungsgeschwindigkeit c . Die Schallausbreitungsgeschwindigkeit hängt von dem Medium und von der Wellenart ab [95]. Ob ein Diskretisierungsverfahren eingesetzt werden kann, hängt somit von der höchsten zu berechnenden Frequenz, der Ausdehnung des Berechnungsgebiets, der interessierenden Wellenart und der zugehörigen Schallausbreitungsgeschwindigkeit im jeweiligen Medium ab. Unter Verwendung dieser Größen wird der niedrige Frequenzbereich in [65] mit bis ca. $k \cdot l \approx 20 \pi$ angegeben. Oberhalb dieser Schranke wird der numerische Aufwand zur Lösung der entstehenden Gleichungssysteme so groß, dass andere Verfahren, wie beispielsweise die SEA oder die Verfahren der geometrischen Akustik, geeigneter sind.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird fast ausschließlich die FEM als Methode zur Konstruktion des numerischen Modells verwendet. In Abschnitt 2.1 wird die FEM in ihren mathematischen Grundzügen vorgestellt. Die FEM, als Vertreterin der Diskretisierungsverfahren, basiert auf der Zerlegung des Berechnungsgebiets in kleine Gebiete. Diese Gebiete werden, in Verbindung mit den nachfolgend vorgestellten Ansatzfunktionen und Freiheitsgraden, als *Finite Elemente* [89] bezeichnet. Die Gebiete sind einfache, geometrische Gebilde wie Drei- und Vierecksflächen bei zweidimensionalen Berechnungen oder Tetraeder und Quader bei Berechnungen im dreidimensionalen Raum. Darüber hinaus ist eine Vielzahl weiterer Elementtypen vorhanden. Die Elemente enthalten Knoten, diese sind an den Ecken, auf den Kan-

ten und, bei bestimmten Elementtypen, innerhalb des Elements positioniert. Die Feldgrößen der zu lösenden partiellen Differentialgleichungen des mathematischen Modells werden an den Knoten bestimmt. Dabei hat jeder Knoten, entsprechend des mathematischen Modells, ein oder mehrere Freiheitsgrade (FHG). Die FHG sind die unabhängigen Variablen der verwendeten, partiellen Differentialgleichungen. Aus den diskreten Werten der FHG an den Knoten werden mittels der Ansatzfunktionen abschnittsweise stetige Lösungen der partiellen Differentialgleichungen über das gesamte Berechnungsgebiet ermittelt. Als Ansatzfunktionen werden einfache Polynomfunktionen verwendet. Die Diskretisierung des Berechnungsgebiets führt, in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit, auf ein System von algebraischen Gleichungen. Die Anzahl der Gleichungen, also die Größe des Gleichungssystems, ist identisch mit der Anzahl der FHG des Systems. Der Aufwand zur Lösung des entstehenden numerischen Modells nimmt mit der Anzahl an Gleichungen zu und ist somit direkt von der Anzahl der Elemente, den Elementtypen sowie der Anzahl der FHG pro Knoten abhängig.

Die Zerlegung des Berechnungsgebiets in Elemente legt, neben dem für eine FEM-Berechnung erforderlichen Berechnungsaufwand, auch den Geometrie- und den Diskretisierungsfehler fest. Der Geometriefehler entsteht, wenn eine gegebene Geometrie nur endlich genau durch die geometrisch einfachen finiten Elemente abgebildet werden kann. Die Approximation der stetigen Feldgrößen durch die Ansatzfunktionen erzeugt den Diskretisierungsfehler. Grundsätzlich nehmen diese Fehler mit abnehmender Elementkantenlänge, also zunehmender Diskretisierungsfeinheit, ab. Die Verwendung sehr kleiner Elemente und somit vieler FHG ist hinsichtlich der Ergebnisqualität günstig. Hinsichtlich des erforderlichen Aufwands zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems sind dagegen wenige FHG wünschenswert. Für Fragestellungen der Akustik ist zusätzlich die angemessene Auflösung der akustischen Wellen ein wesentliches Kriterium. Dazu ist eine ausreichende Anzahl an Knoten erforderlich. Diese Anzahl an Knoten wird häufig im Verhältnis zur Wellenlänge angegeben. Dies entspricht einer Angabe des Verhältnisses von Elementkantenlänge und Wellenlänge [92], hängt dann aber wiederum vom Grad der Ansatzfunktion des Elements ab. Daher wird im Folgenden weiter die Anzahl an Knoten pro Wellenlänge verwendet.

Zu der Frage, wie viele Knoten pro Wellenlänge erforderlich sind, ist eine umfangreiche Literaturbasis vorhanden. In [115] beispielsweise wird, basierend auf dem *Abtasttheorem von Shannon*, festgestellt, dass zwei Knoten pro Wellenlänge mathematisch prinzipiell ausreichend sind. Dennoch führt eine derartige Diskretisierung zu einer ungenügenden Auflösung der akustischen Wellen. Allerdings geht der Autor nur auf den Fall der Berechnung von Eigenvektoren rotationssymmetrischer Geometrien ein. Als vielfach verwendete Daumenregel für dynamische Analysen, vor allem von durch die HELMHOLTZ-Gleichung beschriebenen Problemen, nennt ZIENKIEWICZ einen Wert von zehn Knoten pro Wellenlänge [129]. In [91, 92] kommt MARBURG zu dem Schluss, dass für zeitharmonische Berechnungen im Frequenzbereich unter Berücksichtigung eines Fehlers von ca. 10 – 15 % eine Anzahl von sechs Knoten pro Wellenlänge ausreichend sind. Für den Fall transienter Untersuchungen im Zeitbe-

reich zeigt [103], dass die Anzahl von fünf Knoten pro Wellenlänge für genügend stark gedämpfte Systeme ausreichend ist, für den Fall schwacher Dämpfung aber mehr Knoten pro Wellenlänge eingesetzt werden müssen. Sofern die Wellenlänge bekannt ist, kann also bei einer Anzahl von sechs Knoten pro Wellenlänge mit für viele Anwendungen ausreichend guten Ergebnissen gerechnet werden.

1.3. Motivation und Ziel der Arbeit

Die Wellenlänge akustischer Wellen ist frequenzabhängig und nimmt mit steigender Frequenz ab. Die Untersuchungen in [91, 92, 103] sind Berechnungen von Luftschallproblemen. Für Luftschall ist die Wellenlänge umgekehrt proportional zur Frequenz. Demgegenüber ist für Körperschallprobleme die Wellenlänge abhängig von der Art der akustischen Welle innerhalb des Körpers und den vorliegenden Randbedingungen [65]. Eine analytische Bestimmung der Wellenlänge ist nur für Spezialfälle, wie beispielsweise die Biegewellenlänge einer unendlich ausgedehnten Platte, möglich. Grundsätzlich nimmt auch bei Körperschallproblemen die Wellenlänge mit zunehmender Frequenz ab. Weiterhin ist der Einfluss der Randbedingungen auf die Wellenlänge zumeist unbekannt. In [54] beispielsweise wird gezeigt, dass der Einfluss der Randbedingungen auf das Schwingungsverhalten von doppelschaligen Wänden frequenzabhängig ist. Insgesamt lässt sich also gerade für Fragestellungen, bei denen Körperschall eine Rolle spielt, die zur Bestimmung der Diskretisierung relevante Wellenlänge nur näherungsweise abschätzen. Eine weitere Herausforderung ist die angemessene Diskretisierung des mitunter geometrisch komplexen Berechnungsgebiets. Um eine ausreichende Auflösung der Geometrie, wie beispielsweise eine Bohrung oder eine Rundung, sicherstellen zu können, müssen die Elemente deutlich kleiner als die aufzulösende Geometrie sein. Andernfalls werden geometrische Eigenschaften des Berechnungsgebiets vernachlässigt. Eine konservative Vorgehensweise ist daher die Wahl einer eher zu feinen Diskretisierung, es werden mehr Knoten pro Wellenlänge verwendet als erforderlich [15].

Ziel einer FEM-Berechnung ist die Ermittlung der Lösung des mathematischen Modells. Das mathematische Modell wiederum bildet die beobachteten Phänomene ab. BATHE gibt in [13] folgende Definition des *effektivsten mathematischen Modells* an:

„Das effektivste mathematische Modell ist dasjenige, welches mit ausreichender Genauigkeit bei minimalen Aufwand die geforderten Antworten liefert.“, [13, S. 4, aus dem Englischen übersetzt]

Gegenwärtig wird für FEM-Berechnungen im Frequenzbereich die Diskretisierung anhand der höchsten interessierenden Frequenz und der zugehörigen Wellenlänge festgelegt. Das resultierende Gleichungssystem wird für festgelegte *Frequenzstützstellen* gelöst. Die anhand der höchsten interessierenden Frequenz festgelegte Diskretisierung wird für alle Frequenzstützstellen innerhalb des interessierenden Frequenzbereichs verwendet. Aufgrund der Frequenzabhängigkeit ist die Wellenlänge

für alle Frequenzstützstellen unterhalb der maximalen Frequenz größer als die Wellenlänge, für die das Berechnungsgebiet diskretisiert wurde. Die Diskretisierung ist somit unterhalb der maximalen Frequenz in jedem Fall zu fein und erfordert damit größeren Aufwand zur Lösung als nötig. Im Rahmen der von BATHE angegebenen Definition ist für Berechnungen unterhalb der höchsten interessierenden Frequenz das so erstellte Modell nicht das Effektivste.

Die Festlegung der Diskretisierung erfolgt bei der Überführung des mathematischen in das numerische Modell und wirkt sich direkt auf den Aufwand zur Lösung des entstehenden numerischen Modells aus. Die Variation der Diskretisierung bietet sich somit an, um Variationen eines bestehenden numerischen Modells zu erstellen. Darüber hinaus ist es auch möglich, an weiteren Stellen des Modellierungsprozesses auf das entstehende numerische Modell Einfluss zu nehmen. Beispielsweise kann, durch eine geeignete Einschränkung der für das mathematische Modell verwendeten Gleichungen, das entstehende numerische Modell reduziert werden. Dies entspricht der Variation des mathematischen Modells. Auch die Entscheidung, welche Teile des zu modellierenden Berechnungsgebiets für das mathematische Modell berücksichtigt werden, beeinflusst das entstehende numerische Modell. Es wird das Realitätsmodell variiert. Während des Modellierungsprozesses bieten sich somit einige Möglichkeiten, um vereinfachte Modelle eines Referenzmodells abzuleiten. Diese Modelle verfügen, im Sinne der Modelltheorie von STACHOWIAK, über weniger Attribute des Originals als das Referenzmodell, ihr Verkürzungsmerkmal ist ausgeprägter. Mit der stärkeren Ausprägung des Verkürzungsmerkmals wird auch das Pragmatische Merkmal beeinflusst. Die vereinfachten Modelle sind nicht in dem selben Umfang einsetzbar wie das Referenzmodell. Dennoch gibt es Einsatzmöglichkeiten für diese vereinfachten Modelle. Ein einfaches Beispiel ist die Nutzung einer gröberen Diskretisierung. Die Grenze von sechs Knoten pro Wellenlänge wird für ein solches Modell bei einer niedrigeren Frequenz erreicht als bei dem Referenzmodell. Unterhalb dieser Grenze ist aber das vereinfachte Modell ebenso einsetzbar wie das Referenzmodell. Die Idee der vorliegenden Arbeit ist es daher, zusätzlich zu einem Referenzmodell vereinfachte Modelle abzuleiten, durch einen Validierungsprozess deren Einsetzbarkeit zu ermitteln und, in den Bereichen wo sie einsetzbar sind, sie anstatt des Referenzmodells zu nutzen. Dadurch wird eine Reduktion des Aufwands erreicht. Das Ziel der vorliegenden Arbeit wird wie folgt formuliert:

Ziel der Arbeit Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es ein Verfahren zu entwickeln, dass durch Hinzunahme vereinfachter numerischer Modelle den Frequenzgang einer beliebigen, skalaren Größe des Referenzmodells im Rahmen vorgegebener Anforderungen approximiert und aufgrund des geringeren Aufwands zur Lösung der vereinfachten Modelle den Gesamtaufwand zur Bestimmung der Lösung reduziert. Die Ableitung vereinfachter numerischer Modelle aus dem Referenzmodell erfolgt auf den Abstraktionsebenen des Modellierungsprozesses, dem Realitätsmodell, dem mathematischen und dem numerischen Modell.

Das Referenzmodell ist hier dasjenige numerische Modell, dass mittels der FEM für ein mathematisches Modell unter Berücksichtigung der bereits erwähnten Erkenntnisse zur Diskretisierung und Geometrieauflösung erstellt wird und dessen Lösung im gesamten Frequenzbereich die gesuchte Referenzlösung der Fragestellung liefert. Für die Entwicklung des Verfahrens werden folgenden Arbeitshypothesen zugrunde gelegt:

Hypothese 1 Unterhalb der höchsten interessierenden Frequenz können ohne unzulässigen Genauigkeitsverlust vereinfachte Modelle eingesetzt und damit der Gesamtaufwand zur Approximation des Frequenzgangs des Referenzmodells reduziert werden, sofern die vereinfachten Modelle sich ausreichend ähnlich zu dem Referenzmodell verhalten.

Hypothese 2 Die Verwendung der vereinfachten Modelle lässt sich in einem automatisierten Prozess abbilden, der zur Laufzeit eine geeignete Verteilung der Modelle ermittelt und die Lösung des Problems aus den Teillösungen der Einzelmodelle zusammen setzt. Der Einsatzbereich eines vereinfachten Modells kann durch einen Validierungsprozess an wenigen, geeigneten Frequenzstützstellen gegen das Referenzmodell ermittelt werden.

Hypothese 3 Die vereinfachten Modelle können durch Variation des Realitätsmodells, des mathematischen Modells sowie des numerischen Modells erzeugt werden.

Hypothese 4 Das nach der ersten Berechnung verfügbare Wissen über die Einsatzbereiche der verwendeten Modelle im Frequenzbereich kann bei nachfolgenden Berechnungen wiederverwendet werden. Das Wegfallen der iterativen Modellauswahl ermöglicht weitere Einsparungen von Berechnungszeit. Dadurch können aufwändige Berechnungsprozesse mit vielen gleichartigen Berechnungen, wie sie im Bereich der Unsicherheitsquantifizierung vorkommen, beschleunigt werden.

Hypothese Nummer 1 bildet die Kernannahme der vorliegenden Arbeit. Das Ziel der Arbeit ist die Verkürzung der Berechnungszeit numerischer Berechnungen mittels der FEM für Fragestellungen der Akustik. Der Aufwand zur numerischen Berechnung mittels FEM in der Akustik ist durch die aufzulösenden Wellenlängen getrieben. Mit steigender Frequenz sinkt die Wellenlänge und damit steigt die Feinheit der erforderlichen Diskretisierung. Die zu wählende FEM-Diskretisierung wird üblicherweise auf Basis der kleinsten auftretenden Wellenlänge, also der höchsten Frequenz bestimmt. Für alle Frequenzstützstellen unterhalb der höchsten Frequenz ist die Diskretisierung somit zu fein, der Berechnungsaufwand ist größer als erforderlich. Dieser Nachteil wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit umgangen, indem zusätzlich zu dem zu lösenden Referenzmodell weitere, vereinfachte Modelle hinzugenommen werden, welche die Lösung des Referenzmodells in Teilen des gesamten interessierenden Frequenzbereichs approximieren. Durch den Einsatz dieser vereinfachten Modelle lässt sich der Berechnungsaufwand reduzieren und die Lösung des

gestellten Problems in kürzerer Zeit erhalten. Dabei wird im Rahmen von Hypothese 1 die Einschränkung berücksichtigt, dass die vereinfachten Modelle dem Referenzmodell ausreichend ähnlich sein müssen, sie müssen einer Validierung gegen das Referenzmodell standhalten.

Der Einsatz der vereinfachten Modelle zur Approximation der Gesamtlösung wird im Rahmen eines automatisierten Prozesses abgebildet. Dieser Prozess ist so gestaltet, dass die Einsatzmöglichkeit der verschiedenen, zur Verfügung stehenden Modelle zur Laufzeit ermittelt wird. Als Ergebnis wird die, aus den Lösungen der vereinfachten Modelle zusammen gesetzte, gesuchte Näherungslösung der Lösung des Referenzmodells zurückgegeben. Dieses Vorgehen wird durch Hypothese Nummer 2 abgebildet. Zentral ist in dieser Hypothese das Konzept der Modellauswahl. Während der Laufzeit des Prozesses wird jedes vereinfachte Modell an zuvor gewählten Frequenzstützstellen gegen das Referenzmodell validiert und auf Basis zu definierender Kriterien die Eignung bewertet. Eine wesentliche Herausforderung innerhalb von Hypothese 2 ist es, diesen Validierungsprozess einerseits robust auszuführen und andererseits möglichst wenig Aufwand dafür aufzuwenden.

Hypothese Nummer 3 zielt auf die Art der vereinfachten Modelle ab. In Abschnitt 1.1 wird der Modellierungsprozess beschrieben. Dabei wird ausgehend von der Beobachtung eines, in der Realität stattfindenden, Phänomens ein Realitätsmodell konstruiert. Aus diesem wird das mathematische und aus dem mathematischen das numerische Modell erzeugt. Während jedem dieser Schritte bieten sich Möglichkeiten zur Vereinfachung. Diese Vereinfachungen resultieren letztlich in einem reduzierten numerischen Modell. Ziel der Untersuchung von Hypothese Nummer 3 sind Aussagen darüber, inwieweit das zu entwickelnde Verfahren für vereinfachte Modelle einsetzbar ist, deren Vereinfachungen bei der Erzeugung des Realitätsmodells (a), des mathematischen (b) und des numerischen Modells (c) erreicht werden.

- (a) Als Beispiel für die Ableitung eines vereinfachten Realitätsmodells wird die Vernachlässigung eines Teils des Berechnungsgebiets betrachtet. Dazu wird das, innerhalb einer Fensterverglasung eingeschlossene, Gasvolumen für die folgende Modellierung nicht berücksichtigt. Durch das resultierende, kleinere Berechnungsgebiet ergibt sich ein FEM-Gleichungssystem mit weniger FHG und entsprechend geringerem Aufwand zur Lösung.
- (b) Als Beispiel für die Ableitung vereinfachter mathematischer Modelle wird die Nutzung eines vereinfachten Materialmodells zur Modellierung poroelastischen Materialverhaltens untersucht. Dazu wird für das Referenzmodell das Materialmodell von BIOT [23, 24] verwendet. Die für dieses Materialmodell erforderlichen Elementtypen erfordern, je nach Formulierung, vier [6, 7], fünf [60] oder sechs [100, 101] FHG je Knoten. Als vereinfachtes Modell wird eine Modellierung des Materials als äquivalentes Fluid (bspw. [31]) verwendet. Die zugehörigen Elementtypen erfordern nur einen FHG je Knoten. Die Nutzung eines alternativen Materialmodells resultiert somit ebenfalls, durch die Reduktion der Knotenanzahl der erforderlichen Elementtypen, in einem reduzierten

numerischen Modell. Damit wird der Aufwand zur Lösung des FEM-Gleichungssystems reduziert.

Ein weiteres Beispiel zur Ableitung vereinfachter mathematischer Modelle ist die geeignete Wahl der zu lösenden Differentialgleichungen. Diese Variation kann durch eine angepasste Wahl der Elementformulierung erzielt werden. Für FEM-Berechnungen ist die Nutzung von Volumenelementen eine häufig gewählte Möglichkeit. Ein wesentlicher Vorteil dieses Elementtyps ist die universelle Einsetzbarkeit ohne kinematische Einschränkungen, da die das Elementverhalten beschreibenden Gleichungen direkt aus den Kontinuumsmechanischen Grundgleichungen gewonnen werden [79]. Für akustische Anwendungen sind Volumenelemente somit geeignet um alle Wellenarten zu berücksichtigen. Häufig ist jedoch schon durch die Bauteilgeometrie die Anzahl möglicher Wellenarten beschränkt oder bestimmte Effekte sind von untergeordnetem Interesse. Beispielsweise treten in plattenförmigen Strukturen, sofern ihre Dicke ausreichend klein gegen die Wellenlänge ist und nur Anregungen senkrecht zur Plattenfläche auftreten, nur BiegeWellen auf [77]. Für plattenförmige Strukturen kann daher durch den Einsatz von Plattenelementen eine vereinfachte Modellierung erreicht werden, da diese Elemente nur die für die Biegung relevanten Differentialgleichungen berücksichtigen [79]. Aufgrund der engen Kopplung der verwendeten Gleichungen und dem resultierenden FEM-Gleichungssystem lässt sich somit durch die geeignete Wahl der Elemente und damit der berücksichtigten Gleichungen der Berechnungsaufwand reduzieren.

- (c) Die Ableitung vereinfachter numerischer Modelle wird anhand der Variation der Diskretisierung untersucht. Durch Nutzung verschiedener Diskretisierungen desselben mathematischen Modells werden verschiedene numerische Modelle erhalten. Diese verschiedenen Modelle sind, abhängig von der jeweiligen Diskretisierung, nur für bestimmte Frequenzbereiche geeignet, erfordern aber aufgrund des reduzierten FEM-Gleichungssystems geringeren Aufwand zur Lösung. Durch den geeigneten Einsatz der angepassten numerischen Modelle kann somit der Berechnungsaufwand insgesamt reduziert werden.

Die FEM überführt das mathematische Modell in das numerische Modell. Für wenige Spezialfälle können für die partiellen Differentialgleichungen des mathematischen Modells analytische Lösungen gefunden werden. Diese analytische Lösung bildet das Äquivalent des numerischen Modells. Daher wird die Nutzung einer analytischen Lösung ebenfalls der Variation des numerischen Modells zugeordnet und anhand eines Beispiels untersucht. Die analytische Lösung erfordert zumeist einen weitaus geringeren Berechnungsaufwand als Diskretisierungsverfahren, daher kann auf diese Art ebenfalls der gesamte Berechnungsaufwand für die Fragestellung reduziert werden.

Hypothese Nummer 4 postuliert die Nutzbarkeit der erhaltenen Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle für weitere Berechnungen. In Hypothese Nummer 2 wird die Entwicklung eines Prozesses zur Nutzung des jeweils effizientesten Modells für die Lösung des Problems im Frequenzbereich betrachtet. Dieser Prozess

der Modellauswahl läuft zur Laufzeit der Berechnung ab. Das Ziel ist die Einsparung von Rechenzeit gegenüber der Berechnung mittels des Referenzmodells. Nach einmaliger Ausführung des Prozesses sind die Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle und des Referenzmodells im Frequenzbereich bekannt. Diese Information kann nachfolgend für weitere Berechnungen verwendet werden. Da bei jeder folgenden Berechnung der Auswahlprozess zur Ermittlung der Einsatzbereiche der Modelle entfällt, wird der erreichbare Rechenzeitvorteil vergrößert. Hypothese Nummer 4 zielt daher auf die Möglichkeit ab, die bekannten Einsatzbereiche der Modelle zu nutzen, wenn viele gleichartige Berechnungen erforderlich sind. Als Anwendungsbeispiele werden eine Unsicherheitsquantifizierung mittels der Monte Carlo-Methode sowie eine varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse für die Berechnung der Schalltransmission durch eine doppelschalige Wand untersucht. Die vereinfachten Modelle werden durch Variation der Diskretisierung, also durch Variation des numerischen Modells erhalten. Dieser Prozess basiert auf der Annahme, dass, trotz der erforderlichen Parametervariationen, die nach der ersten Berechnung bekannten Einsatzbereiche der Modelle beibehalten werden können.

1.4. Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. In Kapitel 2 werden der Stand der Technik sowie die zum Verständnis der Arbeit erforderlichen Grundlagen vorgestellt. Das Kapitel umfasst eine Einführung in die FEM, da diese Methode für fast alle Berechnungen im Rahmen der Arbeit zur Anwendung kommt. Dabei wird auf die Anwendungsfelder der FEM in der Akustik eingegangen und die für die Arbeit verwendeten Eingangs- und Ergebnisgrößen werden erläutert. Weiterhin wird in diesem Kapitel eine Übersicht der vorhandenen Ansätze zur Beschleunigung von FEM-Berechnungen vorgestellt. Dabei wird auch auf die relativ neue Klasse der Multi-Fidelity-Verfahren eingegangen. Diese Verfahrensklasse wird aktuell vielfach im Rahmen der Unsicherheitsquantifizierung numerischer Berechnungen eingesetzt und bedient sich der Nutzung mehrerer Modelle unterschiedlicher Komplexität zur Lösung einer Berechnungsaufgabe. Der Kern von Multi-Fidelity-Verfahren ist die *Modell-Management-Strategie*, diese steuert den Einsatz der zur Verfügung stehenden Modelle. Auch der Kern dieser Arbeit ist die Entwicklung einer Modell-Management-Strategie zur Beschleunigung von FEM-Berechnungen in der Akustik. Daher ist das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren an vielen Stellen durch die in Multi-Fidelity-Verfahren eingesetzten Ansätze inspiriert. Den Abschluss von Kapitel 2 bildet eine Einführung in die Unsicherheitsquantifizierung und Sensitivitätsanalysen. Diese Verfahren bilden die Anwendungsbeispiele für das entwickelte Multi-Modell-Verfahren.

In Kapitel 3 wird die Entwicklung des Multi-Modell-Verfahrens zur Beschleunigung einer FEM-Berechnung in der Akustik vorgestellt. Zunächst wird die Idee des Verfahrens anhand eines kurzen Beispiels erläutert. Nachfolgend werden Anforderungen an das Verfahren und die eingesetzten Modelle definiert. Auf Basis des Stands der

Technik werden die Anforderungen an das Verfahren anhand der in Abschnitt 1.3 vorgestellten Arbeitshypothesen abgeleitet. Anhand der definierten Anforderungen wird das Verfahren formal konstruiert und nachfolgend in einen Algorithmus überführt. Das entwickelte Verfahren zielt auf die Reduktion der Rechenzeit bei einmaliger Anwendung auf eine Berechnungsaufgabe der Akustik. Weitere, große Vorteile bieten sich vor allem bei der vielfachen Durchführung des Verfahrens im Rahmen von stochastischen Untersuchungen, wie beispielsweise der Unsicherheitsquantifizierung. Daher wird zum Abschluss von Kapitel 3 der Ansatz zur weiteren Nutzung in solchen Vielfachauswertungs-Anwendungen⁷ aufgezeigt.

Die Anwendung des Verfahrens wird in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellt. Dabei fokussiert sich Kapitel 4 auf die Verifikation und Nutzung des Verfahrens für einzelne Berechnungsaufgaben. Die Verifikationsbeispiele greifen die verschiedenen Möglichkeiten zur Ableitung vereinfachter Modelle für das Referenzmodell, ausgehend von den Abstraktionsebenen des Modellierungsprozesses, auf. Dabei werden das numerische Modell, das mathematische Modell und das Realitätsmodell variiert und die sich ergebenden vereinfachten numerischen Modelle zur Ermittlung des Berechnungsergebnisses eingesetzt. Weiterhin werden einige Untersuchungen zu den Eigenschaften des entwickelten Verfahrens vorgestellt. Diese Untersuchungen zielen auf die praktische Anwendung des Verfahrens und der zu erwartenden Qualität der Näherungslösung ab. In Kapitel 5 wird das Verfahren auf Fragestellungen im Bereich der Unsicherheitsquantifizierung angewendet. Es werden eine Unsicherheitsquantifizierung mit der Monte Carlo-Methode sowie eine globale Sensitivitätsanalyse betrachtet. Aufgrund der vielen gleichartigen Modellauswertungen können die zeitaufwändigen Validierungsprozesse übersprungen werden. Dadurch ergeben sich, im Vergleich zu der direkten Anwendung des Verfahrens, größere Rechenzeiterparnisse. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der Arbeit in Kapitel 6 und einem Ausblick auf offene Fragestellungen in Kapitel 7 ab.

1.5. Beitrag der Dissertation zum Stand der Forschung

Der für die Durchführung numerischer Berechnungen mit der FEM, aber auch mit anderen numerischen Berechnungsverfahren, erforderliche Berechnungsaufwand ist vergleichsweise hoch. Die mit der Zeit kontinuierlich zunehmende Leistung von Computern hinsichtlich der Geschwindigkeit und des verfügbaren Speichers erzielt heute im Vergleich zu früher bereits große Rechenzeiterparnisse. Auch ermöglicht die zunehmende Leistung die Berechnung von Fragestellungen, die vor einiger Zeit aufgrund der Limitationen hinsichtlich des verfügbaren Speichers und der zur Lösung verfügbaren Zeit als nicht berechenbar galten. Dennoch sind numerische Berechnungen, vor allem mit Diskretisierungsverfahren, bezüglich des Ressourcenbedarfs weiterhin herausfordernd. Diese Herausforderungen werden vor allem in dem aktuellen Forschungsfeld der Unsicherheitsquantifizierung besonders relevant, da bei

⁷ aus dem Englischen übersetzt; im Original: „many-query application“ [105, S. 2]

der Durchführung von Monte Carlo-Simulationen mit vielen Wiederholungen der erforderliche Berechnungsaufwand weiter ansteigt. Diesen Herausforderungen lässt sich mit der zunehmenden Leistung der Computer allein nicht begegnen. Daher ist die Reduktion des erforderlichen Berechnungsaufwands numerischer Berechnungen weiterhin ein wesentliches Forschungsfeld.

In Abschnitt 2.2 wird eine Übersicht bekannter Verfahren zur Beschleunigung numerischer Berechnungen vorgestellt. Dies sind die Modellreduktionsverfahren. Die meisten der vorgestellten Verfahren gehen von der Nutzung eines mathematischen, und einem, auf diesem mathematischen Modell basierenden, numerischen Modell aus. Für diesen Fall kann mit vielen Verfahren bereits eine deutliche Beschleunigung der Berechnung erreicht werden. Eine Sonderstellung nimmt die Verfahrensklasse der Multi-Fidelity-Verfahren ein. Diese Verfahren nutzen viele Modelle verschiedener Komplexität gemeinsam. Mit diesen Verfahren wird der Berechnungsaufwand reduziert, indem das jeweils geeignetste Modell zur Beantwortung der Fragestellung verwendet wird. Allerdings sind die meisten Verfahren dieser Klasse für die Nutzung in Vielfachauswertungs-Anwendungen, also stochastischen Untersuchungen beispielsweise mit der Monte Carlo-Methode, konstruiert. Zur Beschleunigung einer einzelnen Berechnung lassen sich die Verfahren nicht direkt verwenden.

Das Anwendungsfeld der Akustik stellt an die numerische Berechnung mit Diskretisierungsverfahren wie der FEM zusätzliche Anforderungen. Dies sind vor allem die Abhängigkeit der Wellenlänge und damit der erforderlichen Diskretisierung von der Frequenz, bei komplexen Strukturen hohe modale Dichten und die Herausforderungen komplexer Materialmodelle für akustisch wirksame Materialien, wie beispielsweise poröse Absorber. Diese Herausforderungen werden von den bestehenden Modellreduktionsverfahren nur unzureichend adressiert. Daher wird mit dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Multi-Modell-Verfahren eine Alternative vorgeschlagen. Das Verfahren nutzt mehrere alternative, vereinfachte Modelle gemeinsam mit einem zu lösenden Referenzmodell zur Beschleunigung einer FEM-Berechnung im Frequenzbereich. Dabei wird eine Approximation der Lösung des Referenzmodells in Verbindung mit einer Rechenzeiterparnis erzielt. Dieser Ansatz unterscheidet sich grundlegend von den existierenden Modellreduktionsverfahren und ist eher an die Klasse der Multi-Fidelity-Verfahren angelehnt. Gegenüber diesen Verfahren ist das entwickelte Multi-Modell-Verfahren so gestaltet, dass eine Beschleunigung sowohl einer einzelnen Berechnung als auch im Rahmen von Vielfachauswertungs-Anwendungen möglich ist. Die Vielzahl der zur Verfügung stehenden Modelle ermöglicht den Einsatz des jeweils effizientesten Modells in verschiedenen Frequenzbereichen. Das Verfahren ist damit besonders auf die Herausforderungen für numerische Berechnungen in der Akustik zugeschnitten.

2. Stand der Technik

In diesem Kapitel wird der Stand der Technik in den für die vorliegende Arbeit relevanten Bereichen zusammengefasst. Dazu wird zunächst auf die Grundlagen der Finite-Elemente Methode und deren Einsatz zur Lösung von Berechnungsaufgaben in der Akustik eingegangen. Das Ziel der Arbeit ist die Beschleunigung von FEM-Berechnungen im Frequenzbereich durch Reduktion des aus der Modellierung resultierenden Berechnungsaufwands. Techniken zur Beschleunigung von FEM-Berechnungen haben sich parallel mit der Entwicklung der FEM etabliert. Daher werden aufbauend auf den Grundlagen der FEM die verbreiteten Verfahren der Modellreduktion und zur effizienten Lösung der entstehenden Gleichungssysteme angesprochen. Das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Verfahren verwendet zur Lösung einer Berechnungsaufgabe neben dem zu lösenden Referenzmodell weitere vereinfachte Modelle. Ein ähnliches Konzept wird mit den Multi-Level- und Multi-Fidelity-Verfahren verfolgt. Der zweite Teil des Kapitels wendet sich daher diesen Verfahren zu. Die Anwendungsbeispiele für das im Rahmen der Arbeit entwickelte Verfahren sind dem Bereich der Unsicherheitsquantifizierung zugeordnet. Daher wird zum Abschluss des Kapitels eine Einführung in die Unsicherheitsquantifizierung und deren Teilgebiet der Sensitivitätsanalyse vorgestellt.

2.1. Die Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist das wahrscheinlich am weitesten verbreitete mathematische Werkzeug zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen [13]. Ursprünglich wurde die FEM zur Berechnung des mechanischen Verhaltens elastischer Körper unter der Einwirkung äußerer Lasten entwickelt und findet seit dem in nahezu allen Ingenieurdisziplinen Anwendung. Neben der Strukturmechanik sind Fragestellungen der Wärmeübertragung, Elektrotechnik, Magnetik und Fluidodynamik wichtige Anwendungsfelder [13, 130]. Nachfolgend wird nur auf die grundlegenden Ideen der FEM und in Abschnitt 2.1.4 auf die Anwendung der FEM in der Akustik eingegangen. Für eine detaillierte Darstellung wird auf Grundlagenwerke wie beispielsweise BATHE [13], ZIENKIEWICZ ET AL. [130] und SZABÓ ET AL. [121] verwiesen.

Wie bereits in Abschnitt 1.1 vorgestellt, erfolgt die Beschreibung realer Systeme auf der Basis von Modellen. Dabei wird ein Realitätsmodell, also die Erfahrung eines Beobachters der Realität, in ein mathematisches Modell überführt. Das mathematische Modell beschreibt das beobachtete Phänomen im Allgemeinen mittels

partieller Differentialgleichungen. Aufgabe der FEM ist es, diese partiellen Differentialgleichungen in Systeme algebraischer Gleichungen zu überführen. Diese bilden das numerische Modell (vgl. Abbildung 1.1). Das numerische Modell wiederum wird typischerweise mittels Computern gelöst. Der Ansatz zur Überführung des mathematischen in das numerische Modell erfolgt im Rahmen der FEM mittels der *Diskretisierung* der zu berechnenden Geometrie. Dabei wird das zu berechnende Gebiet in kleine, geometrisch einfache Teile, zerlegt, die finiten Elemente. Die finiten Elemente sind so gewählt, dass ihr physikalisches Verhalten mathematisch beschrieben werden kann. In [130] beschreibt ZIENKIEWICZ dieses Verfahren als natürlichen Prozess, bei dem das (direkt nicht verstandene) Verhalten eines Gesamtsystems durch das Zusammenwirken bekannter, kleiner Teile des Gesamtsystems verstanden werden kann.

2.1.1. Grundlagen der Finite-Elemente Methode

Die Durchführung einer FEM-Berechnung dient der Lösung partieller Differentialgleichungen für ausgedehnte Berechnungsgebiete. Mögliche Berechnungsgebiete sind im Bereich der Strukturmechanik einzelne Bauteile aus einem Werkstoff oder komplexe Baugruppen mit vielen Bauteilen, Werkstoffen und Fügestellen. Für die Berechnungen von Luftschallfeldern ist das Berechnungsgebiet das akustische Fluid in dem sich der Schall ausbreitet. Neben dem Berechnungsgebiet sind die Randbedingungen und die wirkenden Lasten wesentliche Größen für die FEM-Berechnung. Nachfolgend wird für die Gesamtheit von Berechnungsgebiet, Werkstoffgesetz, Randbedingungen und Lasten der Begriff *System* verwendet.

Die Zerlegung der Geometrie in die finiten Elemente führt dazu, dass die das Systemverhalten beschreibenden partiellen Differentialgleichungen für alle Elemente gelöst werden müssen. Die einzelnen Elemente sind miteinander an den Kanten verbunden. Als Geometrien werden für die Elemente typischerweise einfache, ein-, zwei- und dreidimensionale Objekte wie Drei- und Vierecksflächen, Tetraeder und Quader verwendet. An den Knoten werden die Werte der Variablen der zu lösenden Differentialgleichungen, die *Freiheitsgrade* (FHG) des Systems, berechnet. Für Anwendungen der FEM in der Strukturmechanik sind die FHG typischerweise die Knotenverschiebungen in den berücksichtigten Raumrichtungen. Für Anwendungen in der Berechnung von Luftschallfeldern ist der einzige Freiheitsgrad der Schalldruck. Abhängig von den zu lösenden Differentialgleichungen ist somit die Art und Anzahl der FHG pro Knoten variabel. Neben den Eckpunkten können finite Elemente noch an weiteren Positionen über Knoten verfügen, beispielsweise auf den Kanten oder im Inneren der Elemente. Die nachfolgenden Ausführungen gehen von der Anwendung der FEM zur Berechnung des linearen strukturmechanischen Verhaltens für statische und dynamische Untersuchungen aus und sind aus [13] übernommen.

Ausgangspunkt der Herleitung ist ein dreidimensionaler Körper \mathcal{B} mit der Oberfläche S , der in einzelne Gebiete, die Elemente, zerlegt ist. Die Gesamtheit aller Elemente füllt das gesamte Volumen des Körpers aus, dabei überlappen sich die

Elemente untereinander nicht. Es sei hier angemerkt, dass anstelle von dreidimensionalen Strukturen auch zwei- und eindimensionale Strukturen berechnet werden können. Beispiele für zweidimensionale Strukturen sind beispielsweise Scheiben und Platten, Beispiele für eindimensionale Strukturen sind Stäbe und Federn. Für das nachfolgende Vorgehen sind alle Elemente gleichartig und verfügen über dieselbe Anzahl Knoten je Element. In der praktischen Anwendung der Methode dagegen kann ein System aus verschiedenen Elementtypen bestehen. Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ enthält alle Knotenverschiebungen des zu berechnenden Systems. Innerhalb dieser Arbeit werden Vektoren als Kleinbuchstaben und fett, Matrizen als Großbuchstaben und fett dargestellt. An dem Körper greifen außerdem die äußeren konzentrierten Punktlasten \mathbf{r}_i^C an, dabei bezeichnet der Index i verschiedene Kraftangriffspunkte. Weiterhin greifen die Volumenkräfte \mathbf{f}^B und die, auf der Körperoberfläche \mathcal{S} wirkenden, Oberflächenkräfte \mathbf{f}^S an dem Körper an.

Aus dem Vektor der Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ lassen sich die Verschiebungen innerhalb jedes Elements $\mathbf{u}^{(m)}$ (formuliert für Element m) mittels der Verschiebungs-Interpolationsmatrix $\mathbf{H}^{(m)}$ entsprechend Gleichung (2.1) ermitteln. Dazu werden die Werte der Feldgrößen innerhalb des Elements aus den Werten an den diskreten Knoten zu kontinuierlichen Funktionen über das Gebiet des Elements interpoliert:

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}} \quad . \quad (2.1)$$

Die Verschiebungs-Interpolationsmatrix $\mathbf{H}^{(m)}$ enthält die Form- oder Ansatzfunktionen. Die Ansatzfunktionen sind über das Element stetige Polynomfunktionen. Der Grad der Funktion hängt von der Anzahl der Knoten pro Element ab. Häufig verwendet werden lineare und quadratische Polynome, höhere Polynomgrade sind ebenfalls denkbar. Die zugehörigen Elemente werden als lineare und quadratische Elemente bezeichnet. Die Wahl eines höheren Polynomgrades erhöht die Genauigkeit der FEM-Lösung. Aufgrund der höheren erforderlichen Knotenanzahl erhöht sich gleichzeitig auch der numerische Aufwand.

Die genannten, aus der Diskretisierung des Körper resultierenden, Formulierungen erfolgen, im Rahmen des Modellierungsprozesses, auf der Ebene des numerischen Modells. Für die weitere Darstellung wird der Einfachheit halber lineares, isotropes Materialverhalten betrachtet. Diese Entscheidungen werden bereits auf der Ebene des Realitätsmodells getroffen. Es sei daher angemerkt, dass einige der nachfolgend gezeigten Formulierungen eine andere Form erhalten, wenn beispielsweise nichtlineares Materialverhalten betrachtet wird oder andere Elementformulierungen verwendet werden.

Die aus den Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ resultierenden Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$ des Elements (m) werden entsprechend Gleichung (2.2) mittels der Verschiebungs-Verzerrungsmatrix $\mathbf{B}^{(m)}$ berechnet:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}} \quad . \quad (2.2)$$

Aus dem Produkt der Verzerrungen $\epsilon^{(m)}$ des (m) -ten Elements und der Element-Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C}^{(m)}$ sowie den Spannungen des Elements im unbelasteten Zustand $\tau^{I(m)}$ ergeben sich die Spannungen in Element $\tau^{(m)}$ nach Gleichung (2.3). Die Element-Steifigkeitsmatrix enthält das Materialgesetz und ist für lineares Materialverhalten symmetrisch.

$$\tau^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \epsilon^{(m)} + \tau^{I(m)} \quad (2.3)$$

Mittels des Prinzips der virtuellen Arbeit, in Gleichung (2.4) für einen allgemeinen, kontinuierlichen Körper formuliert, wird ein Kräftegleichgewicht aufgestellt. Die virtuellen Größen werden mit einem Querstrich dargestellt. Die interne virtuelle Arbeit ist das Volumenintegral über das Produkt der virtuellen Verzerrungen $\bar{\epsilon}$ und den Spannungen τ . Die externe virtuelle Arbeit ist die Summe der Volumen- bzw. Flächenintegrale über die Produkte der virtuellen Verschiebungen des Körpers und den jeweils angreifenden Lasten. Zusätzliche wird die virtuelle Arbeit aufgrund der äußeren Punktlasten berücksichtigt. Der hochgestellte Buchstabe $[\dots]^T$ bezeichnet die Transponierten der beteiligten Vektoren.

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}} [\bar{\epsilon}]^T \tau d\mathcal{B}}_{\text{interne virtuelle Arbeit}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} [\bar{\mathbf{u}}]^T \mathbf{f}^{\mathcal{B}} d\mathcal{B} + \int_{\mathcal{S}} [\bar{\mathbf{u}}^{\mathcal{S}}]^T \mathbf{f}^{\mathcal{S}} d\mathcal{S} + \sum_i [\bar{\mathbf{u}}_i]^T \mathbf{r}_i^C}_{\text{externe virtuelle Arbeit}} \quad (2.4)$$

Die für einen kontinuierlichen Körper formulierte virtuelle Arbeit in Gleichung (2.4) wird in Gleichung (2.5) für ein mittels finiter Elemente diskretisiertes System umformuliert. Integriert werden die einzelnen Beiträge jeweils über ein Element, über alle Elemente wird summiert. Die Flächen $\mathcal{S}_q^{(m)}$ sind die Grenzflächen der verwendeten Elemente.

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{\mathcal{B}^{(m)}} [\bar{\epsilon}^{(m)}]^T \tau^{(m)} d\mathcal{B}^{(m)} = \\ \sum_m \int_{\mathcal{B}^{(m)}} [\bar{\mathbf{u}}^{(m)}]^T \mathbf{f}^{\mathcal{B}^{(m)}} d\mathcal{B}^{(m)} \\ + \sum_m \int_{\mathcal{S}_1^{(m)}, \dots, \mathcal{S}_q^{(m)}} [\bar{\mathbf{u}}^{\mathcal{S}^{(m)}}]^T \mathbf{f}^{\mathcal{S}^{(m)}} d\mathcal{S}^{(m)} \\ + \sum_i [\bar{\mathbf{u}}_i]^T \mathbf{r}_i^C \end{aligned} \quad (2.5)$$

Einsetzen der Gleichungen (2.1)-(2.3) in Gleichung (2.5) führt auf das FEM-Gleichungssystem, Gleichung (2.6). Die Summe auf der linken Seite bildet die globale Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems \mathbf{K} . Die Summen auf der rechten Seite bilden jeweils Vektoren der einzelnen Lastanteile. Darin sind $\mathbf{r}^{\mathcal{B}}$ die Volumenkräfte und $\mathbf{r}^{\mathcal{S}}$

die Oberflächenkräfte. Die im unbelasteten Zustand in den Elementen vorhandenen Spannungen resultierenden in den Lasten \mathbf{r}^I . Der Vektor \mathbf{r}^C enthält die äußeren, an einzelnen Knoten angreifenden, Punktlasten.

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\mathbf{u}}}^T \left[\underbrace{\sum_m \int_{\mathcal{B}^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} d\mathcal{B}^{(m)}}_{=\mathbf{K}} \right] \hat{\mathbf{u}} = \\ \overline{\hat{\mathbf{u}}}^T \left[\underbrace{\left\{ \sum_m \int_{\mathcal{B}^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{\mathcal{B}^{(m)}} d\mathcal{B}^{(m)} \right\}}_{=\mathbf{r}^{\mathcal{B}}} \right. \\ + \underbrace{\left\{ \sum_m \int_{\mathcal{S}_1^{(m)}, \dots, \mathcal{S}_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} d\mathcal{S}^{(m)} \right\}}_{=\mathbf{r}^{\mathcal{S}}} \\ \left. - \underbrace{\left\{ \sum_m \int_{\mathcal{B}^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{I(m)} d\mathcal{B}^{(m)} \right\}}_{=\mathbf{r}^I} + \mathbf{r}^C \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Gleichung (2.6) ist das Finite-Elemente Gleichungssystem für den statischen Fall. Für den Fall von Einheitsverschiebungen der virtuellen Verschiebungen $\overline{\hat{\mathbf{u}}}^T$ und den angegebenen Abkürzungen lässt sich Gleichung (2.6) vereinfacht schreiben als:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r} ; \text{ mit } \mathbf{r} = \mathbf{r}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}^{\mathcal{S}} - \mathbf{r}^I + \mathbf{r}^C \quad (2.7)$$

Der dynamische Fall wird erhalten, wenn die Volumenkräfte $\mathbf{r}^{\mathcal{B}}$ in Gleichung (2.6) um die Trägheits- und Dämpfungskräfte erweitert werden. Diese Erweiterung zeigt Gleichung (2.8). Die Trägheitskräfte resultieren aus der Masse des Körpers und werden über die Volumenintegration über jedes Element und die Materialdichte $\rho^{(m)}$ im Element erhalten. Sie sind proportional zur Beschleunigung. Die Dämpfung wird als geschwindigkeitsproportionale, viskose Dämpfung für jedes Element durch den Dämpfungsparameter $\eta^{(m)}$ charakterisiert.

$$\mathbf{r}^{\mathcal{B}} = \sum_m \int_{\mathcal{B}^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \left[\mathbf{f}^{\mathcal{B}^{(m)}} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{u}} - \eta^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \dot{\mathbf{u}} \right] d\mathcal{B}^{(m)} \quad (2.8)$$

Ersetzen des Terms $\mathbf{r}^{\mathcal{B}}$ in Gleichung (2.7) durch die rechte Seite von Gleichung (2.8) führt auf das Gleichungssystem für den dynamischen Fall (2.9). Darin sind \mathbf{M} die

Massenmatrix und \mathbf{D} die Dämpfungsmatrix. Die Vektoren $\ddot{\mathbf{u}}$ und $\dot{\mathbf{u}}$ sind die Knotenbeschleunigungen und die Knotengeschwindigkeiten.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (2.9)$$

2.1.2. Randbedingungen einer FEM-Berechnung

Die Gleichungssysteme in Gleichung (2.7) und (2.9) sind in der formulierten Form singular und somit nicht lösbar. Sie werden regulär durch die Einführung von Randbedingungen. Als Randbedingungen werden die Vorgabe der Feldgrößen und deren Ableitungen auf dem Rand des Berechnungsgebiets bezeichnet. Wird der Wert der Feldgröße direkt vorgegeben, so handelt es sich um DIRICHLET-Randbedingungen. Demgegenüber handelt es sich bei der Vorgabe der Ableitung der Feldgrößen auf dem Rand um NEUMANN-Randbedingungen. Für strukturelle Berechnungen ist eine mögliche Randbedingung die Vorgabe der Knotenverschiebung. Für Berechnungen von Luftschall sind die Vorgabe des Schalldrucks und der Schallschnelle mögliche Randbedingungen.

2.1.3. Transformation in den Frequenzbereich

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die FEM im Frequenzbereich angewendet. Dazu wird eine stationäre, zeitharmonische Lösung angenommen. In diesem Fall sind der Vektor der Knotenverschiebungen und der Lastvektor komplex mit der Form:

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}' e^{j\omega t}; \quad \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}' e^{j\omega t} \quad (2.10)$$

In Gleichung (2.10) sind t die Zeit, $j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit und e die Eulersche Zahl. Die Frequenz f ist durch die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ gegeben. Mit einer Prime ($\hat{\mathbf{u}}'$) gekennzeichnete Größen bezeichnen jeweils die Amplitude der Knotenverschiebung $\hat{\mathbf{u}}$ und die Amplitude der anregenden Kraft $\hat{\mathbf{r}}$. Mit den harmonischen Ansätzen und den zugehörigen Zeitableitungen kann Gleichung (2.9) in den Frequenzbereich überführt werden [77]:

$$\underbrace{[-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{K}]}_{=\mathbf{A}(\omega)} \hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{r}}' \quad (2.11)$$

Das Gleichungssystem (2.11) lässt sich durch Zusammenfassen der Matrixsumme auf der linken Seite zu einer frequenzabhängigen Systemmatrix $\mathbf{A}(\omega)$ als Standardform eines linearen Gleichungssystems schreiben:

$$\mathbf{A}(\omega) \hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{r}}' \quad (2.12)$$

Während der FEM-Berechnung wird das Gleichungssystem (2.12) für jede interessierende Frequenz gelöst [54]. Diese Frequenzen werden als *Frequenzstützstellen* bezeichnet. Als Ergebnis liegen die frequenzabhängigen, komplexen Amplituden der Werte der FHG, hier der Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$, des Systems vor. Die Wahl der Frequenzstützstellen, an denen Gleichung (2.12) ausgewertet wird, ist prinzipiell beliebig. In den meisten Anwendungen ist der Frequenzgang einer Größe, beispielsweise des Schalldrucks, von Interesse. Um den Frequenzgang in einem Frequenzbereich ausreichend genau charakterisieren zu können, ist eine zumeist große Anzahl von Frequenzstützstellen erforderlich. Häufig werden die Frequenzstützstellen, an denen das Gleichungssystem gelöst wird, äquidistant im Frequenzbereich verteilt. Aber auch nicht-äquidistante Verteilungen sind möglich. Beispielsweise kann ein geringer Frequenzabstand der Stützstellen im Bereich der Eigenfrequenzen des Systems und ein großer Frequenzabstand entfernt von den Eigenfrequenzen verwendet werden. Dadurch wird eine gute Auflösung in den Bereich erreicht, in denen der Frequenzgang hohe Gradienten aufweist, also sich die betrachtete Feldgröße stark mit der Frequenz ändert. Durch solche nichtlinearen Verteilungen der Frequenzstützstellen lässt sich eine Verringerung des numerischen Aufwands erreichen.

2.1.4. Anwendungsgebiete der FEM in der Akustik

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die FEM formal eingeführt und in den Frequenzbereich transformiert wurde, wird im folgenden Abschnitt die Anwendung der FEM in der Akustik vorgestellt. Dabei wird separat auf die Modellierung von Körperschallfeldern, Luftschallfeldern sowie poröse Medien eingegangen. Auf die Herleitung des numerischen Modells wird verzichtet, an den entsprechenden Stellen wird auf weiterführende Literatur verwiesen. Grundsätzlich resultiert nach der Wahl der Diskretisierung, eines geeigneten Materialmodells und der Auswahl geeigneter finiter Elemente ein Gleichungssystem entsprechend Gleichung (2.9) für den Zeitbereich bzw. entsprechend Gleichung (2.12) für den Frequenzbereich. Eine ausführliche Herleitung der numerischen Modelle für Luft- und Körperschallberechnungen wird beispielsweise in [54] gegeben.

Wie bereits in Kapitel 1 beschrieben, ist nach CHLADNI die Akustik die Lehre vom Schall. Schall ist eine mechanische Schwingung eines elastischen Mediums. Somit kann Schall, mit Ausnahme des theoretischen Falls des absoluten Vakuums, überall vorkommen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird zwischen Körperschall und Luftschall unterschieden. Körperschall ist derjenige Schall, der sich in festen Körpern ausbreitet. Feste Körper zeichnen sich durch die Fähigkeit aus, Schubspannungen übertragen zu können. Dadurch können Longitudinal- und Transversal-, Dehn-, Torsions- und Biegewellen auftreten. Für die Schallabstrahlung sind vor allem die Biegewellen relevant, da sie einerseits eine Bewegungskomponente senkrecht zur Körperoberfläche besitzen und andererseits leicht anregbar sind. Demgegenüber übertragen Fluide nahezu keine Schubspannungen. Daher treten nur Longitudinalwellen auf. Luftschall ist ein Teilgebiet des Fluidschalls. [33, 77, 85]

Modellierung von Körperschallfeldern

Für die Modellierung von Körperschall in Strukturen können, abhängig von dem zu modellierenden System, eine große Anzahl ein-, zwei- und dreidimensionaler Elemente verwendet werden. Zu den eindimensionalen Elementen gehören Stab- und Federelemente, sie bilden nur Belastung in einer Richtung ab. Zweidimensionale Elemente sind zumeist Dreieck- und Viereckflächen, zu den Volumenelementen gehören beispielsweise Tetraeder und Hexaeder. Neben der Dimension der Elemente können Berechnungen von Körperschallfeldern unter Berücksichtigung von ein, zwei und drei Raumdimensionen durchgeführt werden. Dabei ist auch eine Kombination möglich, beispielsweise können zweidimensionale Schalenelemente in dreidimensionalen Berechnungen verwendet werden.

Die Modellierung dreidimensionaler Körper erfolgt im allgemeinen Fall mittels Volumenelementen. Volumenelemente bilden die Kontinuumsmechanischen Grundgleichungen ab. Sie sind universell einsetzbar und für alle Wellenarten der Akustik geeignet. Sie verfügen an den Elementknoten über drei Verschiebungsfreiheitsgrade und sind in der Lage, dreidimensionale Spannungszustände abzubilden. Aufgrund der geometrischen Komplexität ist die Anzahl der Knoten pro Element groß und die Lösung der resultierenden Gleichungssysteme ist aufwändig. Eine Herleitung des numerischen Modells für dreidimensionale Strukturelemente zur Nutzung in der FEM ist beispielsweise in [54, S. 30ff] zu finden.

Im Fall dünnwandiger Strukturen ist der Spannungszustand selbst bei dreidimensionaler Verformung quasi eben. In diesem Fall kann das Bauteilverhalten mittels Schalenelementen beschrieben werden. Das Schalenelement ist eine Kombination des Scheibenelements, welches nur Verformungen in der Elementebene berücksichtigt, und des Plattenelements, welches nur Auslenkungen senkrecht zur Plattenfläche beschreibt [16, 54]. Schalenelemente besitzen drei Verschiebungs- und zwei Verdrehfreiheitsgrade je Knoten, insgesamt also fünf FHG. Ähnlich wie für Balken existieren für Platten verschiedene mathematische Modelle. Die Modelle unterscheiden sich in der Berücksichtigung der Schubverformung. Dabei berücksichtigt die Formulierung nach MINDLIN die Schubverformung analog zur Balkentheorie nach TIMOSHENKO, das Modell nach KIRCHHOFF vernachlässigt Schubverformung analog zu der Balkentheorie nach BERNOULLI [39, 77]. Die KIRCHHOFF'sche Plattentheorie ist, aufgrund der Vernachlässigung des Einflusses der Schubspannung, für sehr dünne Strukturen geeignet. Als sehr dünne Strukturen werden typischerweise solche Strukturen bezeichnet, deren Abmessung in Dickenrichtung weniger als 10 % der anderen Körperabmessungen entspricht. Für Bauteile bis zu einer Abmessung in Dickenrichtung von ca. 20 % der anderen Körperabmessungen wird die Plattentheorie nach MINDLIN empfohlen, da hier der Einfluss der Schubspannungen relevant wird. Beide Theorien gehen von einer, im Vergleich zu den Bauteilabmessungen, kleinen Durchbiegung der Platte aus. Herleitungen des numerischen Modells für die Plattentheorie nach MINDLIN sind beispielsweise in [1, 16] zu finden, das numerische Modell der Plattentheorie nach KIRCHHOFF wird beispielsweise in [82] vorgestellt. Über die Formulierung der

Einsetzbarkeit der Plattentheorien abhängig von der Bauteildicke wird in [82] die Einsetzbarkeit abhängig von der Biegewellenlänge λ_B abgeschätzt. Danach resultiert aus der Plattentheorie nach KIRCHHOFF gegenüber der Theorie nach MINDLIN ein Fehler von weniger als 10 % für eine Bauteildicke d :

$$d < \frac{\lambda_B}{5,62} \quad . \quad (2.13)$$

Als Ergebnisgröße für numerische Berechnungen von Körperschallfeldern wird häufig die sich einstellende Schwingschnelle \mathbf{v} verwendet. Die Ergebnisgrößen einer FEM-Berechnung für Körperschall sind die Knotenverschiebungen. Daher wird die Schwingschnelle durch Ableitung der Knotenverschiebungen nach der Zeit ermittelt. Für Berechnungen im Frequenzbereich ist der Vektor der Schwingschnelle aller Knoten $\hat{\mathbf{v}}$ entsprechend Gleichung (2.10):

$$\hat{\mathbf{v}} = j\omega \hat{\mathbf{u}}' e^{j\omega t} \quad . \quad (2.14)$$

Der Vektor der Knotenbeschleunigungen ergibt sich analog zu $\hat{\mathbf{a}} = -\omega^2 \hat{\mathbf{u}}' e^{j\omega t}$.

Die Ausbreitung akustischer Wellen in festen Körpern wird durch den Wellenwiderstand beeinflusst. Der Wellenwiderstand wird auch als Impedanz Z_{Struktur} bezeichnet und ist für Strukturschwingungen als der Quotient aus der anregenden Kraft F und der resultierenden Schwingschnelle v definiert:

$$Z_{\text{Struktur}} = \frac{F}{v} \quad . \quad (2.15)$$

Die beteiligten Größen sind im Allgemeinen komplexwertig. Die Impedanz ist, aufgrund der beteiligten Schwingschnelle \mathbf{v} , ein Vektor. Diese, sowie die nachfolgenden Gleichungen (2.15)-(2.16) sind als skalare Größen formuliert, es handelt sich immer um eine Komponente des zugehörigen Vektors. Während die Impedanz den Widerstand gegen eine Anregung kennzeichnet, wird die Anregbarkeit durch die Admittanz h_{Struktur} (auch: Mobilität) charakterisiert:

$$h_{\text{Struktur}} = \frac{v}{F} \quad . \quad (2.16)$$

Sowohl die Impedanz als auch die Admittanz können als Punktimpedanz und Transferimpedanz bzw. -admittanz angegeben werden. Für die Definition der Punktimpedanz/-admittanz sind die Orte der anregenden Kraft und der sich einstellenden Schwingschnelle identisch. Unterscheiden sich der Ort des Kraftangriffs und der Ort für den die Schwingschnelle bestimmt wird, so handelt es sich um die Transferimpedanz/-admittanz. Die Admittanz wird häufig auch als Transferfunktion bezeichnet. Sie stellt den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße Kraft und der Ausgangsgröße Schwingschnelle dar.

Modellierung von Luftschallfeldern

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Luftschallfelder in allseitig begrenzten Gebieten berechnet. Dieser Fall ist für die Modellierung von Innenraumproblemen relevant. Es treten also keine Schallwellen ins Freie aus. Für den Fall des Außenraumproblems, also den Fall der Abstrahlung von Schall in ein nicht begrenztes Freifeld, ist eine besondere Behandlung der Berandungen des Berechnungsgebiets erforderlich. Auf diesen Effekt wird nachfolgen im Rahmen der Impedanzrandbedingung kurz eingegangen. Allgemein werden Luftschallwellen durch die im Zeitbereich formulierte Wellengleichung (2.17) beschrieben:

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad . \quad (2.17)$$

In Gleichung (2.17) bezeichnet p den Schalldruck, c bezeichnet Schallgeschwindigkeit und t kennzeichnet die Zeit. Das Δ -Symbol ist der Laplace-Operator [95]. Die Wellengleichung kann unter der Annahme stationärer, zeitharmonischer Vorgänge in die HELMHOLTZ-Gleichung (2.18) überführt werden. Die HELMHOLTZ-Gleichung ist im Frequenzbereich formuliert:

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Die HELMHOLTZ-Gleichung beschreibt Luftschallwellen im Frequenzbereich mit dem Schalldruck p , der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ mit der Frequenz f und der Schallgeschwindigkeit c . Der Quotient $\frac{\omega}{c}$ wird auch als Wellenzahl k bezeichnet. Die Herleitung des numerischen Modells für Berechnungen mit der HELMHOLTZ-Gleichung wird beispielsweise in [54, 82] vorgestellt.

Für FEM-Berechnungen anhand der HELMHOLTZ-Gleichung kommt zu der DIRICHLET- und NEUMANN-Randbedingung hinzu. Durch die DIRICHLET-Randbedingung wird der Schalldruck auf dem Rand des Fluidvolumens festgelegt. Demgegenüber wird bei der NEUMANN-Randbedingung die Schallschnelle in Normalenrichtung zu der Berandung des Fluidgebietes vorgegeben. Dieser Fall ist technisch besonders relevant, da aufgrund der Haftbedingung die Schallschnelle an der Oberfläche schwingender Festkörper, beispielsweise einer Lautsprechermembran, identisch mit der Schwingschnelle des Festkörpers ist. Impedanz-Randbedingungen sind ein Spezialfall der ROBIN-Randbedingung. Dabei werden die Größen Schalldruck und Schallschnelle in ein festes Verhältnis gesetzt. Dieser Fall ist bei der Berücksichtigung teilweise reflektierender Begrenzungsflächen des Fluidgebiets, also schallabsorbierenden Flächen, relevant [54].

Die Lösung des Innenraumproblems ist sowohl mit der DIRICHLET- als auch mit der NEUMANN-Randbedingung für gedämpfte Systeme eindeutig. Für Außenraumprobleme muss zusätzlich die SOMMERFELD'sche Abstrahlbedingung erfüllt sein [77]:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = j k p + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad . \quad (2.19)$$

Die SOMMERFELD'sche Abstrahlbedingung besagt, dass Schallwellen sich nur von der Quelle weg ins Unendliche bewegen und nicht reflektiert werden. Die Größe r ist hier der Radius einer das Berechnungsgebiet vollständig umschließenden Kugel. Wird die Bedingung erfüllt, so ist eine eindeutige Lösung von Außenraumproblemen möglich [16, 82]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird nur auf Innenraumprobleme eingegangen, daher wird dieser Fall hier nicht weiter betrachtet.

Besonders relevant für die Charakterisierung von Begrenzungsflächen des Fluidgebietes ist die Luftschallimpedanz Z_{Luft} . Sie ist definiert als der Quotient aus dem komplexen Schalldruck p und der komplexen Schallschnelle v , vgl. Gleichung (2.20). Der Schalldruck ist eine skalare, die Schallschnelle ist eine vektorielle Größe. Gleichung (2.20) berücksichtigt hier nur eine Raumrichtung, also eine Komponente des Schallschnellevektors:

$$Z_{\text{Luft}} = \frac{p}{v} \quad . \quad (2.20)$$

Für ebene Wellen sind die Größen Schalldruck und Schallschnelle in Phase, die Impedanz ist dann rein reellwertig und wird *Luftschallkennimpedanz* Z_0 genannt. In diesem Spezialfall ist $\frac{p}{v} = \rho_0 c$, die Luftschallkennimpedanz lässt sich somit aus der Schallgeschwindigkeit c und der Luftdichte ρ_0 unter Normalbedingungen berechnen. Für eine Temperatur von $T = 288,15 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$ ergibt sich die Luftschallkennimpedanz zu:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \rho_0 c \approx 417,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \\ \text{mit} \\ \rho_0 &= 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ c &= 340,57 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Für das ideale Gas lassen sich die angegebenen Werte der Größen Schallgeschwindigkeit und Dichte aus der absoluten Temperatur berechnen. Die zugehörigen Gleichungen (5.3)-(5.4) sind in Abschnitt 5.1.2 angegeben. Die Luftschallimpedanz wird in FEM-Berechnungen vor allem als Randbedingung verwendet. Beispielsweise verschwindet für feste Berandungen eines Luftvolumens aufgrund der Haftbedingung

die Schallschnelle an der Wand. Die Impedanz ist somit unendlich. In Abschnitt 4.2.2 wird die Berechnung eines Schalldämpfers vorgestellt. Der Schalldämpfer endet in einem Rohr. Unterhalb der cut-on Frequenz¹ breiten sich in diesem Rohr nur ebene Wellen aus. Hier wird eine Impedanz-Randbedingung am Rohrende mit der Luftschallkennimpedanz vorgegeben. Dadurch werden Reflexionen der auf das Rohrende treffenden Schallwellen vermieden. Das Modell verhält sich, als sei das Rohr unendlich ausgedehnt.

Modellierung poröser Materialien

Die Dämpfung von Luftschall ist gerade für die Raumakustik ein wichtiges Feld. Die Erzeugung einer geeigneten Raumakustik in Innenräumen erfolgt typischerweise mittels poröser Absorber. Daher ist für die Berechnung von Luftschallfeldern die Modellierung poröser Materialien wesentlich. Poröse Materialien, wie beispielsweise Schäume oder Gewebe, bestehen aus einer Festkörper- und einer Fluidphase. Grundsätzlich wird zwischen zwei Modellierungen bezüglich der Festkörperphase, dem Skelett, unterschieden. Das Modell nach BIOT berücksichtigt neben der kompressiblen Fluidphase auch eine elastische Festkörperphase. Somit existieren für das BIOT-Modell neben der Druckwelle in der Fluidphase eine Druck- und eine Schubwelle in der Festkörperphase. Alle drei Wellentypen werden bei der Modellierung berücksichtigt [4]. Wird die Festkörperphase als starr betrachtet, so werden Modelle der Klasse mit bewegungslosem Skelett verwendet. Diese Modelle werden auch als *äquivalentes Fluid* bezeichnet. Die Modelle dieser Klasse modellieren nur die Druckwelle innerhalb des Fluids. Der Einfluss des Skeletts auf die Schallausbreitung im Fluid wird homogenisiert und dem Fluid zugeschrieben. Beispiele für diese Modelle sind das CHAMPOUX–ALLARD Modell, das JOHNSON ET AL. Modell, das LAFARGE ET AL. und das WILSON Modell sowie einige weitere [4, 98, 102]. Welche Modellklasse, mit elastischer oder starrer Festkörperphase, verwendet werden kann, wird durch die Kopplung zwischen der Fluid- und der Festkörperphase bestimmt. Dabei nimmt die Kopplung mit zunehmender Frequenz ab. Die Grenze wird durch die *Phasenentkopplungsfrequenz* f_d beschrieben: [4, 131]

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{\phi^2 \Xi}{\rho_{\text{Skelett}}} \quad (2.22)$$

Die Phasenentkopplungsfrequenz hängt von der Porosität des porösen Materials ϕ , dem spezifischen Strömungswiderstand Ξ und der Dichte der Festkörperphase ρ_{Skelett} ab. Unterhalb der Phasenentkopplungsfrequenz ist die Kopplung zwischen Fluid und Skelett groß. Eine Schallwelle im Fluid regt in diesem Fall das Skelett zu Schwingungen an, es breiten sich zusätzlich zu der Druckwelle im Fluid auch Wellen in der Festkörperphase aus. In diesem Bereich müssen somit alle vorliegenden Wellen in Fluid und Festkörperphase berücksichtigt werden. Dies ist mittels des BIOT-Modells

¹vgl. beispielsweise [95, S. 181]

möglich. Ist die betrachtete Frequenz höher als die Phasenentkopplungsfrequenz, so ist die Kopplung zwischen Fluid und Festkörper gering und kann vernachlässigt werden. In diesem Fall ist die Druckwelle im Fluid nicht in der Lage die Festkörperphase zu Schwingungen anzuregen. Es breitet sich somit nur die Druckwelle innerhalb des Fluids aus. Dennoch führt das Vorhandensein des Skeletts zu einer Ausbreitungsdämpfung. Diese wird homogenisiert der Fluidphase zugeschrieben. Die Modelle der Klasse der äquivalenten Fluide modellieren somit das poröse Material als einphasiges Fluid. [4, 8]

Für eine Übersicht des mathematischen Modells der Theorie von BIOT sei auf [16] verweisen. Dabei wird auch auf die Ableitung der in dieser Arbeit verwendeten Formulierung der Wellenausbreitung im porösen Material auf Basis des Schalldrucks in der Fluidphase sowie den Verschiebungen der Festkörperphase eingegangen. Weiterhin wird das resultierende numerische Modell abgeleitet. Für eine Formulierung des mathematischen Modells einer schwingenden Platte aus porösem Material auf Basis der BIOT-Theorie sowie die Ableitung des zugehörigen numerischen Modells sei zusätzlich auf [29] verwiesen.

Pegeldarstellung der Ergebnisgrößen der FEM-Berechnung

In der Akustik werden die Werte der berechneten Feldgrößen zumeist nicht linear, sondern als Pegel dargestellt. Gründe dafür sind einerseits die durch das Weber-Fechner Gesetz beschriebene, relative Empfindung des Menschen und andererseits der sehr große Wertebereich auftretender akustischer Größen [95]. Der Pegel einer Größe ist definiert als der zehnfache dekadische Logarithmus des auf einen Bezugswert bezogenen Wertes der Größe. Die Angabe eines Pegels erfolgt in der Pseudoeinheit Dezibel (dB). Gleichung (2.23) gibt den Zusammenhang allgemein für eine Größe ψ mit dem Bezugswert ψ_0 an. Für die Bildung des Pegels der Größe ψ wird üblicherweise der Effektivwert $\tilde{\psi}$ verwendet. Der Effektivwert² des Zeitsignals einer Größe charakterisiert die im Signal enthaltene Energie.

$$L_\psi = 10 \lg \left(\frac{\tilde{\psi}}{\psi_0} \right)^\epsilon \text{ dB} \quad (2.23)$$

In der Akustik werden Pegel sowohl von Feldgrößen als auch von Energiegrößen, wie beispielsweise der nachfolgend vorgestellten Schallleistung, gebildet. Um einheitlich die Energie zu quantifizieren wird für den Pegel einer Feldgröße diese in eine Energiegröße umgerechnet. Dazu dient der Exponent ϵ in Gleichung (2.23). Für den Pegel einer Feldgröße, wie beispielsweise dem Schalldruck, ist $\epsilon = 2$. Dadurch wird der Wert des Pegels proportional zur Schallenergie. Ist die Größe ψ in Gleichung (2.23) bereits eine Energiegröße, so ist $\epsilon = 1$.

²Effektivwert, auch RMS (Root Mean Square), Wurzel des Zeitintegrals des quadrierten Signals

Für die Bildung des Schalldruckpegels ist die Feldgröße der Effektivwert des Schalldrucks p und der Bezugswert $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa. Der Bezugswert ist so gewählt, dass ein normalhörender Mensch einen Schall mit einer Frequenz von 1.000 Hz und einem Pegel von 0 dB gerade noch wahrnimmt. Es handelt sich um die Hörschwelle des Menschen. Für andere Feld- oder Energiegrößen wie die Schallschnelle, die Schallleistung oder die Schwingsschnelle sind die Bezugswerte in [47] genormt.

Ermittlung der abgestrahlten Schallleistung aus strukturdynamischen Berechnungen

Eine häufig zur Charakterisierung akustischer Quellen und Felder verwendete Größe ist die Schallleistung P . Sie charakterisiert für Quellen, wie viel Schallenergie pro Zeiteinheit von der Quelle in die Umgebung fließt. Für Schallfelder charakterisiert die Schallleistung die Energie, die pro Zeiteinheit von dem Schallfeld transportiert wird. Stehende Wellenfelder werden als reaktive Felder bezeichnet, sie transportieren keine Schallleistung. Demgegenüber werden fortschreitende Wellen als aktive Felder bezeichnet, sie transportieren Schallleistung. Die Schallleistung P ist das Integral der Schallintensität \mathbf{i} über eine Fläche A :

$$P = \int_A \mathbf{i} \, dA = \int_A p \, \mathbf{v} \, dA \quad . \quad (2.24)$$

Die in Gleichung (2.24) verwendete Schallintensität ist das Produkt aus dem Schalldruck und dem Vektor der Schallschnelle. Der Schallleistungspegel wird entsprechend Gleichung (2.23) bestimmt. Als Bezugswert für die Bildung des Pegels wird die Bezugsschallleistung $P_0 = 1 \text{ pW} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W}$ verwendet. Da es sich bei der Schallleistung bereits um eine Energiegröße handelt ist keine Quadrierung erforderlich, $\epsilon = 1$. Der Pegel L_W der Schallleistung erhält, im Unterschied zu den üblichen Pegelgrößen, nicht den Index P um einer Verwechslung mit dem Schalldruckpegel L_p vorzubeugen:

$$L_W = 10 \lg \left(\frac{\tilde{P}}{P_0} \right) \text{ dB} \quad . \quad (2.25)$$

Ein häufiger Anwendungsfall ist die Berechnung der durch eine schwingende Fläche abgestrahlten Schallleistung. Schwingende Flächen erzeugen Schall in einem die Fläche umgebenden Fluid, sofern sie Verschiebungskomponenten senkrecht zu der Flächenebene besitzen. Der durch die schwingende Fläche erzeugte Schalldruck kann für den Spezialfall der Schallabstrahlung in ein Freifeld mittels des RAYLEIGH-Integrals berechnet werden [95]. Das RAYLEIGH-Integral ist sowohl für das Nah- als auch für das Fernfeld exakt und berechnet den Schalldruck für einen beliebigen Aufpunkt über der schwingenden Fläche in kartesischen Koordinaten. Allerdings interessiert für die Charakterisierung einer akustischen Quelle nur die tatsächlich ins Fernfeld abgestrahlte Schallleistung. In Gleichung (2.26) ist daher eine Fernfeldnäherung des RAYLEIGH-Integrals angegeben. Mittels dieser Gleichung kann der Schalldruck auf

einer Halbkugeloberfläche mit dem Radius r und den Raumwinkeln φ_x und φ_y berechnet werden. Dabei wird über die in Richtung der Flächennormalen wirkende Schwingschnelle $v(\tilde{x}_v, \tilde{y}_v)$ an jedem Ort $(\tilde{x}_v/\tilde{y}_v)$ der schwingenden Fläche integriert. Die Größen l_x und l_y geben die Kantenlängen, der hier rechteckig angenommenen, schwingenden Fläche an.

$$p_{\text{fern}}(r, \varphi_x, \varphi_y) = \frac{j\omega\rho}{2\pi r} e^{-jkr} \cdot \int_{-\frac{l_y}{2}}^{+\frac{l_y}{2}} \int_{-\frac{l_x}{2}}^{+\frac{l_x}{2}} v(\tilde{x}_v, \tilde{y}_v) e^{jkC} d\tilde{x}_v d\tilde{y}_v \quad (2.26)$$

mit

$$C = (\tilde{x}_v \sin \varphi_x \cos \varphi_y + \tilde{y}_v \cos \varphi_x \sin \varphi_y)$$

Mit Gleichung (2.26) ist der Schalldruck auf einer Halbkugeloberfläche im Fernfeld über einer schwingenden Fläche bekannt. Die Schallleistung kann aus der Schallintensität durch Integration über die Halbkugelfläche entsprechend Gleichung (2.24) ermittelt werden. Für das Fernfeld sind die Wellen nahezu eben, das Schallfeld kann als Freifeld angenähert werden. Diese Näherung ermöglicht die Ermittlung der für die Bestimmung der Schallintensität erforderlichen Schallschnelle aus dem Schalldruck. Dazu werden die Gleichungen (2.20) und (2.21) kombiniert zu $v = \frac{p}{\rho_0 c}$. Eingesetzt in Gleichung (2.26) ergibt sich die Schallleistung im Fernfeld zu:

$$P_{\text{Rayleigh}} = \frac{1}{2\rho_0 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} |p_{\text{fern}}|^2 r^2 \sin \vartheta d\varphi_y d\varphi_x \quad (2.27)$$

2.2. Beschleunigung von FEM-Berechnungen

Das in Gleichung (2.9) dargestellte FEM-Gleichungssystem wird gelöst, um die Werte der FHG der diskretisierten partiellen Differentialgleichungen zu erhalten. Gleichung (2.9) ist im Zeitbereich formuliert, die Lösung erfolgt mittels Zeitintegrationsverfahren für diskrete Zeitschritte. Wird das Gleichungssystem in den Frequenzbereich transformiert, so entsteht ein System der in Gleichung (2.12) gezeigten Form. In diesem Fall wird das Gleichungssystem für vorgegebene Frequenzstützstellen gelöst. Die Anzahl der in jedem Zeitschritt oder für jede Frequenzstützstelle zu lösenden Gleichungen in den Gleichungssystemen ist identisch mit der Anzahl der FHG des zu berechnenden Systems. Für reale Fragestellungen ist eine Größenordnung von 10^6 FHG realistisch, die numerische Lösung des Gleichungssystems ist entsprechend aufwändig. Aufgrund der Komplexität der zu lösenden Gleichungssysteme haben sich parallel zur Entwicklung der FEM verschiedene Techniken etabliert, welche die Reduktion der erforderlichen Berechnungszeit und des erforderlichen Speichers im Computer zum Ziel haben. Auch das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren

zielt auf die Reduktion der Berechnungszeit einer FEM-Berechnung im Frequenzbereich. Daher werden im nachfolgenden Abschnitt bekannte Verfahren zur Reduktion der Berechnungszeit vorgestellt.

Die Reduktion der Berechnungszeit kann auf allen Ebenen des Modellierungsprozesses erfolgen. Auf Basis des numerischen Modells lassen sich durch die Nutzung effizienter Lösungsalgorithmen sowie durch parallele Nutzung vieler Prozessoren des zur Berechnung genutzten Computers große Reduktionen der Berechnungszeit erreichen. Das Ziel ist somit eine möglichst schnelle Lösung des aus dem Referenzmodell resultierenden Gleichungssystems. Demgegenüber zielen Modellreduktionsverfahren (MOR)³ auf die Reduktion der entstehenden Gleichungssysteme ab. Weiterhin werden adaptive Methoden verwendet. Adaptive Methoden verfeinern iterativ eine erste grobe Lösung bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Während die genannten Verfahren ausschließlich auf das numerische Modell angewendet werden, verwenden Multi-Level- und Multi-Fidelity-Verfahren eine Kombination aus vereinfachten Ersatzmodellen und dem zu lösenden Referenzmodell. Dabei werden, im Fall der Multi-Fidelity-Verfahren, auch alternative mathematische Modelle in das Lösungsverfahren mit einbezogen. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren reduziert den Aufwand einer FEM-Berechnung unter Nutzung vereinfachter Modelle. Es gehört somit zur Klasse der Multi-Fidelity-Verfahren. Daher wird im folgenden Abschnitt ausführlich auf diese Verfahrensklasse eingegangen.

2.2.1. Algorithmen zur Lösung des FEM-Gleichungssystems

Für die Lösung des FEM-Gleichungssystems ist eine Vielzahl an Algorithmen verfügbar, dabei wird grundsätzlich zwischen direkten und indirekten Lösungsverfahren unterschieden. Beispiele für direkte Lösungsverfahren sind beispielsweise das *Gauß-Verfahren* und das *Cholesky-Verfahren* [13]. Direkte Verfahren lösen das Gleichungssystem innerhalb eines vorgegebenen Prozesses, beispielsweise durch Rückwärts-Einsetzen. Demgegenüber verwenden indirekte Verfahren einen iterativen Prozess, bei dem mit jeder Iteration die Qualität der Lösung verbessert wird, bis eine vorgegebene Ergebnisqualität erreicht ist. Beispiele für iterative Verfahren sind beispielsweise die Algorithmen *Conjugate Gradient*, *Conjugate Gradient Squared* [117] und der *Generalized Minimal Residual*-Algorithmus [111]. Während die direkten Lösungsalgorithmen vor allem bei Systemen mit wenigen FHG Vorteile hinsichtlich der erforderlichen Ausführungszeit und Speicherbedarf bieten, erzielen die indirekten Methoden bei Systemen mit vielen FHG bessere Ergebnisse. Einen umfangreichen Vergleich verschiedener Lösungsalgorithmen bietet beispielsweise [54]. Insgesamt steigt die erforderliche Rechenzeit bei allen Algorithmen mindestens linear mit der Anzahl FHG an. In [87] beispielsweise wird der Anstieg der Rechenzeit mit $\mathcal{O}(\text{FHG}^{1,5})$ für einen leistungsfähigen direkten Lösungsalgorithmus angegeben.

³Modellordnungsreduktion, im Folgenden kurz Modellreduktion, englisch: Model Order Reduction, MOR

2.2.2. Parallelisierung der Berechnung

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, steigt die erforderliche Rechenzeit stark mit der Anzahl zu berechnender FHG des Gleichungssystems an. Neben der Optimierung der zur Lösung des Gleichungssystems verwendeten Algorithmen ist die Nutzung von Parallelisierung eine weitere Möglichkeit zur Beschleunigung der Berechnung. Dabei wird das zu lösende Gleichungssystem nicht von einem Prozessor gelöst, sondern es werden möglichst viele Prozessoren parallel verwendet. Um eine Verteilung der Berechnungsaufgabe auf mehrere Prozessoren zu ermöglichen existieren verschiedene Ansätze. Bei der *Gebietszerlegung* wird das Berechnungsgebiet aufgeteilt. Für jeden Teil des Berechnungsgebiets wird, ausgehend von der Diskretisierung, ein eigenes Gleichungssystem erstellt und von einem Prozessor gelöst. Während der Lösung der entstehenden Gleichungssysteme tauschen die Prozessoren untereinander die an den Grenzen der Berechnungsgebiete entstehenden Randbedingungen aus [81]. Eine alternative Methode ist die *Zerlegung des Gleichungssystems*. Der Vorteil dieses Ansatzes ist die universelle Einsetzbarkeit, da auch solche Gleichungssysteme parallel gelöst werden können, die nicht durch Diskretisierungsverfahren erhalten werden [12].

Eine weitere Methode zur Parallelisierung kann bei der Berechnung der frequenzabhängigen Systemantwort, entsprechend Gleichung (2.12), angewendet werden. Die Gleichung wird für alle interessierenden Frequenzstützstellen gelöst. Diese Berechnungen sind unabhängig voneinander. Somit kann die Menge aller erforderlichen Berechnungen auf mehrere Prozessoren aufgeteilt werden. Dadurch wird ebenfalls eine Reduktion der insgesamt erforderlichen Berechnungszeit erreicht. Die erzielbare Reduktion hängt dabei linear von der Anzahl zur Verfügung stehender Prozessoren ab. Das Verfahren wird im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

2.2.3. Verfahren der Modellreduktion

Modellreduktionsverfahren zielen auf die Reduktion der zu berechnenden FHG eines Systems ab. Das erhaltene, reduzierte System bildet die wesentlichen Eigenschaften des Ausgangssystems mit ausreichender Genauigkeit ab. Aufgrund der geringeren Anzahl zu berechnender FHG folgt eine Reduktion der erforderlichen Rechenzeit [14]. Die Reduktion erfolgt auf Basis von Gleichung (2.9) und überführt diese in das reduzierte System

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{u}}_R + \mathbf{D}_R \dot{\mathbf{u}}_R + \mathbf{K}_R \mathbf{u}_R = \mathbf{r}_R \quad . \quad (2.28)$$

Die im reduzierten Gleichungssystem (2.28) verwendeten Terme sind die reduzierte Massenmatrix \mathbf{M}_R , die Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_R und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_R sowie

der reduzierte Lastvektor \mathbf{r}_R . Die reduzierten Matrizen und Vektoren lassen sich aus ihren Entsprechungen des Ausgangssystems ableiten nach:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R &= \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \\ \mathbf{D}_R &= \mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T} \\ \mathbf{K}_R &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \\ \mathbf{r}_R &= \mathbf{T}^T \mathbf{r} \quad . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Grundsätzlich besteht das Ziel der Reduktionsverfahren im Finden eines niedrig-dimensionalen Unterraums, aufgespannt durch die Spalten der Matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{a \times b}$, mit der Anzahl der FHG im Unterraum b und der Anzahl der FHG des Ausgangssystems a . Als Ergebnis wird der reduzierte Verschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}_R$ erhalten, er ist eine Approximation des Verschiebungsvektors $\hat{\mathbf{u}}$ des Ausgangssystems mit dem Fehlerterm err nach [80]:

$$\hat{\mathbf{u}}_R = \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}} + err \quad . \tag{2.30}$$

Anhand des in Gleichung (2.30) enthaltenen Fehlerterms err wird deutlich, dass die Nutzung von Modellreduktionsverfahren im Allgemeinen auf Approximationen des Ausgangssystems mit einer endlichen Genauigkeit führt. Nach [14, 17, 80] haben sich zur Bestimmung des Unterraums \mathbf{T} vor allem die folgenden Verfahrensklassen entwickelt:

- Modales Abschneiden (auch: Substrukturtechnik, Statische Kondensation)
- Padé- und Padé-artige Näherungen (Krylov-Unterraum Methoden)

Die vorgenannten Verfahren zielen auf die Reduktion der FHG eines zu berechnenden Systems ab. Für sehr große Systeme, wie sie bei FEM-Berechnungen üblich sind, sind die Verfahren gut geeignet und etabliert. Vor allem die auf dem Modalen Abschneiden basierenden Methoden sind häufig in kommerzieller FEM-Software verfügbar [90]. Neben den genannten Methoden zur Erzeugung reduzierter Modelle existiert noch eine Verfahrensklasse basierend auf dem *Balancierten Abschneiden*. Nachfolgend wird kurz auf die Methoden des Modalen Abschneidens sowie der Padé-Näherungen eingegangen. Für die Verfahrensklasse des Balancierten Abschneidens sei beispielsweise auf die Arbeiten in [14, 17, 18, 19, 61] verwiesen.

Modales Abschneiden Die Methoden dieser Klasse sind die wohl ältesten Modellreduktionsverfahren. Sie basieren auf der Projektion des dynamischen Systemverhaltens auf den durch die Eigenvektoren des Systems aufgespannten Unterraum. Dabei werden zunächst die Eigenvektoren des Systems (vgl. Gleichung (2.12)) berechnet. Von allen existierenden Eigenvektoren wird eine, im Vergleich zur Gesamtmenge

der Eigenvektoren, kleine Menge Basisvektoren als *modale Basis* gewählt. Dabei werden zumeist die zu den tiefen Eigenfrequenzen gehörenden Eigenvektoren verwendet. Mittels der modalen Basis werden Projektionen der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen sowie des Lastvektors berechnet und das resultierende Gleichungssystem (2.28) gelöst. Aufgrund der vergleichsweise kleinen Anzahl verwendeter Basisvektoren enthält das resultierende Gleichungssystem nur wenige FHG und ist sehr effizient lösbar. Demgegenüber ist, aufgrund der Reduktion, die Lösung nur eine Approximation der Lösung des vollständigen Gleichungssystems. Die Qualität der Approximation kann durch Variation der Anzahl und geeignete Auswahl der verwendeten Eigenvektoren angepasst werden [17, 54, 75, 80]. Bekannte Vertreter dieser Verfahrensklassen sind die GUYAN-Reduktion [32, 63] (auch: statische Reduktion) und ihre Verallgemeinerung, die dynamische Reduktion sowie die CRAIG-BAMPTON-Reduktion [37, 38].

Padé- und Padé-artige Näherungen Die auf Padé-Näherungen basierenden Verfahren zielen auf die Approximation einer Transferfunktion zwischen wenigen FHG des zu berechnenden Systems ab. Eine Transfer- oder Übertragungsfunktion ist das Verhältnis der Ausgangs- und Eingangsgrößen eines dynamischen Systems im Frequenzbereich. Die Transferfunktion wird dazu um eine gewählte Mittenfrequenz herum mittels der Padé-Reihenentwicklung approximiert. Das Verfahren ist auch als *moment matching* bekannt und zielt auf die Berechnung der Koeffizienten (Momente, engl.: moments) der die Transferfunktion approximierenden Padé-Reihe. Während die unendliche Padé-Reihe das Ausgangssystem repräsentiert, wird das reduzierte Modell durch die endliche Reihe beschrieben. Die Ermittlung der Momente erfolgt wiederum mittels einer Projektion in einen Krylov-Unterraum. Mit dem Lanczos-Algorithmus zur Lösung des entstehenden mathematischen Problems wird das Verfahren als Padé-via-Lanczos Methode bezeichnet. [14, 17, 54, 80]

2.2.4. Adaptive Anpassung der Diskretisierung

Die Modellreduktion geht von einem Referenzmodell hoher Qualität aus und leitet daraus vereinfachte Modelle ab. Das Ziel ist dabei eine möglichst gute Approximation des Referenzmodells. Demgegenüber gehen adaptive Methoden den umgekehrten Weg. Zunächst wird ein Modell geringer Qualität und Genauigkeit erstellt und mit diesem eine erste Lösung der Berechnungsaufgabe ermittelt. Auf der Basis von Fehlerschätzern wird das Modell dann sukzessive verfeinert, bis der Fehler eine Toleranzgrenze unterschreitet. Die Entwicklung geeigneter Fehlerschätzer ist ein aktives Forschungsfeld, verbreitet sind Residuum-basierte Methoden, Extrapolationsmethoden und die Recovery-Technik. [128]

Die Anwendung adaptiver Methoden für FEM-Berechnungen verwendet Verfeinerungsstrategien zur Verbesserung der Diskretisierung. Dabei wird ausgenutzt, dass

eine feinere Diskretisierung zu einer höheren Ergebnisqualität führt. Als Verfeinerungsstrategien kommen die Klassen h -Verfeinerung, p -Verfeinerung und hp -Verfeinerung zur Anwendung. Bei der h -Verfeinerung wird unter Beibehaltung der verwendeten Elementtypen die Feinheit der Diskretisierung erhöht. Als Verfahren können sowohl die Teilung vorhandener Elemente als auch eine vollständige, neue Diskretisierung des Berechnungsgebietes verwendet werden. Das Konzept der p -Verfeinerung behält die Diskretisierung bei, erhöht wird der Polynomgrad der Ansatzfunktionen. Die Kombination der beiden genannten Verfahren führt zur hp -Verfeinerung. Die Verfeinerung der Diskretisierung wird zumeist auf den Bereich des Berechnungsgebietes beschränkt, in denen besonders hohe Fehler vorliegen. [15, 66, 128]

Ein Ansatz zur Nutzung adaptiver Methoden für FEM-Berechnungen in der Akustik wird in [15] anhand von Beispielen mit variierender Komplexität vorgestellt. Als Methode wird eine h -Verfeinerung gewählt. Bei allen Beispielen werden Luftschallfelder betrachtet, gelöst wird die HELMHOLTZ-Gleichung. Es kann gezeigt werden, dass durch die lokale Verfeinerung der Diskretisierungen die Genauigkeit der berechneten Lösung zunimmt. In [128] wird ebenfalls eine h -Verfeinerung zur Lösung der HELMHOLTZ-Gleichung mittels FEM verwendet. Vergleiche mit im gesamten Berechnungsgebiet verfeinerten Diskretisierungen zeigen, dass lokale Verfeinerung zu mindestens äquivalenten Ergebnissen mit deutlich reduziertem numerischen Aufwand führen können. In [10, 11] wird ein ähnliches Konzept für die Wellengleichung vorgestellt. Aufgrund der Formulierung im Zeitbereich ist die Verfeinerung der Diskretisierung sowohl örtlich als auch zeitlich variabel. Es wird gezeigt, dass sehr feine Diskretisierungen vor allem im Bereich großer Amplituden erforderlich sind. Im Bereich kleiner Amplituden kann eine grobe Diskretisierung verwendet werden. Darüber hinaus wird auf die Eigenschaft eingegangen, dass die örtlich variable Diskretisierung zu örtlich veränderlichen Wellenwiderständen führt. Dies führt zu künstlichen Reflexionen, die bei den Betrachtungen im Frequenzbereich in [15, 128] nicht beobachtet werden.

Die Untersuchungen in [15, 66, 128] sind Betrachtungen im Frequenzbereich und zielen vor allem auf die Quantifizierung des Fehlers und die Verringerung des numerischen Aufwands durch die Nutzung adaptiver Diskretisierungen. Die Betrachtungen erfolgen nur für einzelne Frequenzen. In [58] geht GILJOHANN auf den Effekt ein, dass für Betrachtungen im Frequenzbereich mit vielen interessierenden Frequenzen sich für jede betrachtete Frequenz die zugehörige Wellenlänge ändert. Für eine Lösung mittels FEM innerhalb akzeptabler Fehlergrenzen gilt eine Diskretisierung mit sechs Knoten pro Wellenlänge als erforderlich (vgl. Abschnitt 1.2 und [91]). Somit ist eine, für alle Frequenzstützstellen identische, Diskretisierung nicht geeignet, da entweder für niedrige Frequenzen der numerische Aufwand größer als erforderlich ist oder bei hohen Frequenzen große Fehler auftreten. Eine derartige Modellierung ist nicht im Sinne der in Abschnitt 1.3 vorgestellten Definition des effektivsten mathematischen Modells. Als Alternative für derartige Anwendungen wird in [58] ein Algorithmus zur automatisierten Vergrößerung der Diskretisierung vorgeschlagen. Allerdings wird die Vergrößerung in dem vorgestellten Beispiel weit oberhalb der unteren Grenze von sechs Knoten pro Wellenlänge für die höchste betrachtete Frequenz abgebrochen.

2.2.5. Multi-Level- und Multi-Fidelity-Verfahren

Die in Abschnitt 2.2.3 vorgestellten Modellreduktionsverfahren zielen auf die Ableitung eines vereinfachten numerischen Modells von einem vorhandenen numerischen Referenzmodell ab. Das Ziel ist es, das vereinfachte Modell *anstelle* des Referenzmodells zu lösen und auf diese Weise mit einem Rechenzeitvorteil eine Approximation der Lösung des Referenzmodells zu erhalten. Die Klasse der Modellreduktionsverfahren ist somit auf den Bereich der numerischen Modelle und der Implementierung dieser beschränkt. Demgegenüber verfolgt die Klasse der Multi-Fidelity-Verfahren einen anderen Ansatz. Der Begriff *Fidelity* lässt sich dabei mit Genauigkeit und / oder Komplexität übersetzen [50]. Multi-Fidelity-Verfahren verwenden das Referenzmodell *gemeinsam mit* vereinfachten, approximierenden Modellen geringerer Genauigkeit und / oder Komplexität zur Lösung einer Berechnungsaufgabe. Im Unterschied zu den Modellreduktionsverfahren werden die vereinfachten Modelle nicht notwendigerweise aus dem Referenzmodell abgeleitet. Vielmehr können einerseits solche vereinfachten Modelle, die mittels Modellreduktionsverfahren aus dem Referenzmodell abgeleitet werden, verwendet werden. Andererseits können auch eigenständige mathematische Modelle, deren Abbildungsmerkmal geringer und deren Verkürzungsmerkmal stärker ausgeprägt ist als die Merkmale des Referenzmodells (vgl. Abschnitt 1.1 und [118]), verwendet werden. [105]

Die Klasse der Multi-Level-Verfahren ist den Multi-Fidelity-Verfahren grundsätzlich ähnlich. Auch hier werden das Referenzmodell und die vereinfachten Modelle gemeinsam verwendet. Allerdings ist das Spektrum der verwendeten vereinfachten Modelle insofern eingeschränkt, als dass die vereinfachten Modelle, ähnlich wie bei den Modellreduktionsverfahren, aus dem Referenzmodell durch Variation eines Parameters abgeleitet werden. Ein Beispiel sind Mehrgitter-Verfahren, bei denen ein vereinfachtes Modell einer FEM-Berechnung beispielsweise durch eine gröbere Diskretisierung des Berechnungsgebiets abgeleitet wird. Multi-Level-Verfahren gehen somit für die vereinfachten Modelle von demselben mathematischen Modell aus wie das Referenzmodell. Dies ist der wesentliche Unterschied zu den Multi-Fidelity-Verfahren, welche auch auf vereinfachte Modelle, die auf alternativen mathematischen Modellen basieren, angewendet werden können. [27]

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren nutzt verschiedene, vereinfachte Modelle gemeinsam mit einem Referenzmodell, um FEM-Berechnungen für Fragestellungen aus der Akustik zu beschleunigen. Die vereinfachten Modelle können vereinfachte numerische Modelle des Referenzmodells sein. Aber auch alternative mathematische Modelle können als vereinfachte Modelle verwendet werden. Es handelt sich somit um ein Multi-Fidelity-Verfahren. Im folgenden Abschnitt wird zunächst eine Einführung in Multi-Fidelity-Verfahren gegeben. Dabei werden vor allem die Konzepte der Modell-Management-Strategie und der möglichen Modellklassen betrachtet.

Modellklassen für Multi-Fidelity-Verfahren

Nach [105] können die für Multi-Fidelity-Verfahren verwendeten vereinfachten Modelle in drei Modellklassen unterteilt werden. Die erste Klasse nutzt zur Ableitung Wissen über den modellierten *physikalischen Effekt* oder die *Implementierung* des Referenzmodells. Das Wissen über den physikalischen Effekt ermöglicht die Ableitung vereinfachter mathematischer Modelle durch die Modellierung verschiedener Theorien desselben Effektes. Für Anwendungen in der Akustik ist hier beispielsweise die Theorie poröser Materialien zu nennen. Als Referenzmodell kann das Modell nach BIOT dienen, dass sowohl die akustischen Wellen in der Festkörperphase als auch die Druckwelle in der Fluidphase des Materials berücksichtigt. Als vereinfachte Modelle können beispielsweise Modelle verwendet werden, die das poröse Material als äquivalentes Fluid modellieren. Dabei wird das Materialverhalten der beiden Phasen vereinfacht als eine Phase beschrieben. Neben der vereinfachten Modellierung des physikalischen Effekts kann auch eine Variation der Implementierung des Referenzmodells, beispielsweise durch das Weglassen von Termen höherer Ordnung, erzeugt werden. Die zweite Klasse der vereinfachten Modelle basiert auf *Projektionsmethoden*. Dabei werden vereinfachte Modelle unter anderem mittels der in Abschnitt 2.2.3 vorgestellten Modellreduktionsverfahren erzeugt. Die Erzeugung der Basis, auf die das zu lösende Referenzmodell projiziert wird, nutzt verschiedene Methoden. Neben den bereits erwähnten Krylov-Unterraum-Methoden kommen beispielsweise die Proper Orthogonal Decomposition oder die Centroidal Voronoi Tesselation zur Anwendung. Die Modelle der ersten beiden Klassen berücksichtigen somit die zugrundeliegende Physik und beschreiben diese vereinfacht. Demgegenüber bilden die vereinfachten Modelle der dritten Klasse die Eingangsgrößen der Modelle auf die jeweiligen Ausgangsgrößen ab. Sie modellieren mathematisch die Übertragungs- oder *Transferfunktion*. Die zugrundeliegende Physik wird nicht modelliert. Diese Abbildung wird dabei häufig als Linearkombination von Basisfunktionen dargestellt, deren Koeffizienten mittels Regression oder Interpolation ermittelt werden. Diese Modelle werden häufig auch als Surrogate, Meta- oder Ersatzmodelle bezeichnet. [36, 76, 99, 105, 120]

Modell-Management-Strategien für Multi-Fidelity-Verfahren

Eine wesentliche Eigenschaft von Multi-Fidelity-Verfahren sind die verwendeten Modell-Management-Strategien (MMS). Im Rahmen von Multi-Fidelity-Verfahren werden verschiedene Modelle unterschiedlicher Genauigkeit gemeinsam zur Berechnung einer Lösung verwendet. Modell-Management-Strategien bestimmen den Einsatz der vereinfachten Modelle und des Referenzmodells sowie die Kombination der Berechnungsergebnisse der einzelnen Modelle. Dabei stellen die MMS sicher, dass die vereinfachten Modelle zur Beschleunigung der Berechnung beitragen. Weiterhin sichern MMS durch Rückgriff auf das Referenzmodell die Konvergenz des Verfahrens ab. [2, 3, 105]

Nach [105] lassen sich Modell-Management-Strategien in die Klassen *Adaption*, *Fusion* und *Filterung* einteilen. Die Verfahrensklasse der Adaption zielt darauf ab, das vereinfachte Modell so zu verändern, dass die Ergebnisse mit den Ergebnissen des Referenzmodells vereinbar sind. Neben der Veränderung des Modells ist auch die Korrektur der Berechnungsergebnisse des vereinfachten Modells möglich. Während die Adaption darauf abzielt das Ergebnis eines vereinfachten Modells direkt zu verwenden, wird bei der Verfahrensklasse der Fusion die Berechnungsergebnisse des vereinfachten und des Referenzmodells kombiniert. Ein Beispiel sind die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Monte-Carlo Simulationen. Dabei sind viele gleichartige Simulationen mit variierten Eingangsdaten durchzuführen. Auf Fusion basierende MMS zielen darauf ab, das Gesamtergebnis der Simulation mit möglichst wenigen Auswertungen des Referenzmodells und vielen Auswertungen der vereinfachten Modelle zu ermitteln. Die Verfahren Adaption und Fusion nutzen somit die Ergebnisse der vereinfachten Modelle und des Referenzmodells gemeinsam. Demgegenüber wird bei dem Konzept der Filterung entschieden, welches der zur Verfügung stehenden Modelle verwendet wird. Beispielsweise wird zunächst das vereinfachte Modell ausgewertet und die Genauigkeit des Ergebnisses bewertet. Das Referenzmodell wird nur dann ausgewertet, wenn das mit dem vereinfachten Modell erzielte Ergebnis als zu ungenau eingestuft wird. Eine weitere Möglichkeit der Filterung besteht in der Vorauswahl möglicher Ergebnisse auf Basis der vereinfachten Modelle. Von allen möglichen Ergebnissen werden in einem zweiten Schritt nur die vielversprechenden Ergebnisse mittels des Referenzmodells genauer untersucht.

2.3. Stochastische Berechnungsverfahren

Die bisherigen Ausführungen gehen davon aus, dass Phänomene der Realität durch einen Beobachter rezipiert und in ein Realitätsmodell übersetzt werden. Um eine Beschreibung und Vorhersagen der Phänomene zu ermöglichen wird das Realitätsmodell in ein mathematisches Modell übersetzt. Unter Verwendung von Methoden zur Lösung der das mathematische Modell beschreibenden Gleichungen, wie beispielsweise der FEM, wird das numerische Modell erzeugt. Dieses wiederum wird in einem Computer gelöst. Die mit dieser Modellierungskette erzielten Berechnungsergebnisse sind deterministisch. So lange dieselben Eingangsdaten für das mathematische Modell verwendet werden, führt eine Wiederholung der Berechnung auf dasselbe Ergebnis. Dies wird bei Experimenten nicht beobachtet. Zwei aufeinander folgende Experimente liefern nicht dasselbe Ergebnis. Der Grund liegt in der inexakten Kenntnis der, üblicherweise zeitabhängigen, Ausgangsbedingungen unter denen die Experimente durchgeführt werden. Es handelt sich dabei um einen nicht-deterministischen Prozess, das Ergebnis ist *unsicher*. Die Betrachtung und Beschreibung derartiger Prozesse erfolgt mittels des mathematischen Konzepts der Wahrscheinlichkeit. Die Charakterisierung der Ergebnisse derartiger Prozesse verwendet die Methoden der Statistik. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren wird zur Quantifizierung der Unsicherheit des Berechnungsergebnisses sowie der Sensitivität gegenüber

den Eingangsdaten einer FEM-Berechnung eingesetzt. Daher werden nachfolgend knapp die stochastischen Methoden der Unsicherheitsquantifizierung und Sensitivitätsanalyse vorgestellt. Für Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik sei auf Grundlagenwerke wie beispielsweise [55, 69, 78, 83, 93, 109] verwiesen.

2.3.1. Verfahren der Unsicherheitsquantifizierung

Das Feld der Unsicherheitsquantifizierung hat allgemein die Bestimmung der statistischen Eigenschaften eines Systems zum Ziel. Stochastische Eigenschaften weist ein System auf, weil es unsichere Größen enthält. Grundsätzlich wird zwischen zwei Arten von Unsicherheit, der *aleatorischen Unsicherheit* und der *epistemischen Unsicherheit*, unterschieden. Mit aleatorischer Unsicherheit wird die einer Größe eigene Unsicherheit, also naturgegebene Schwankungen, bezeichnet. Sie ist nicht reduzierbar, aber für einen festen Zustand eines Systems konstant. Deshalb kann die aleatorische Unsicherheit durch die Erhebung vieler Daten charakterisiert und mittels Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen beschrieben werden. Demgegenüber beschreibt die epistemische Unsicherheit fehlendes Wissen über ein System. Dieses fehlende Wissen kann durch Erhebung weiterer Daten reduziert werden, damit wird auch die Unsicherheit reduziert. Die epistemische Unsicherheit ist somit reduzier- und theoretisch eliminierbar. [110, 123]

Die Quellen für Unsicherheit im Rahmen einer numerischen Berechnung sind die *Eingangsdaten*, die *numerische Näherung* sowie die *Modellierung*. Die Unsicherheit in den Eingangsdaten beschreibt alle unsicheren Eigenschaften des modellierten Systems, deren Werte zur Berechnung erforderlich sind. Dazu gehören beispielsweise die Werte der Materialparameter, die Abmessungen der Geometrie, die gewählten Randbedingungen und berücksichtigte Lasten. Die Eingangsdaten werden dadurch zu Quellen für Unsicherheit, weil die für die Berechnung verwendeten Daten nie exakt den tatsächlich (beispielsweise im Experiment) vorliegenden Bedingungen entsprechen. Die Art der aufgrund unsicherer Eingangsdaten erzeugten Unsicherheit kann aleatorischer und epistemischer Natur sein. Die aufgrund der numerischen Näherung generierte Unsicherheit folgt aus der Übersetzung des mathematischen Modells in das numerische Modell. Quellen für Unsicherheit sind dabei beispielsweise die gewählte Diskretisierung des Berechnungsgebietes, der gewählte Elementtyp oder die Implementierung des numerischen Modells im Computer. Diese Eigenschaften werden zu Unsicherheitsquellen, wenn die Eignung der numerischen Näherung, beispielsweise durch Fehlerschätzer, nicht abgesichert werden kann. Die Unsicherheit aufgrund der numerischen Näherung kann sowohl aleatorischer als auch epistemischer Natur sein. Eine dritte Quelle für Unsicherheit ist das gewählte mathematische Modell. Während des Modellierungsprozesses werden Annahmen getroffen, aufgrund derer das mathematische Modell festgelegt wird. Auch hier kann die Eignung des gewählten Modells nicht abgesichert werden. Allerdings kann die erzeugte Unsicherheit prinzipiell durch Wahl eines höherwertigen mathematischen Modells reduziert werden, die Unsicherheit ist somit epistemischer Natur. [110]

Ein Ziel der Unsicherheitsquantifizierung ist die Bestimmung der Unsicherheit des Ergebnisses aufgrund der im System enthaltenen aleatorischen und epistemischen Unsicherheiten. Dazu werden die Unsicherheiten durch das System propagiert. Die nachfolgenden Ausführungen gehen nur von der Propagation der Unsicherheit aufgrund unsicherer Eingangsdaten aus. In [110] werden Hinweise zur Behandlung von Unsicherheiten aufgrund der Modellierung sowie der numerischen Näherung gegeben. Übersichten der Verfahren zur Unsicherheitsquantifizierung aufgrund unsicherer Eingangsdaten werden beispielsweise in [34, 84, 86] gegeben. Nachfolgend werden die einfachsten Methoden, das *Analytische Verfahren* sowie die *Monte Carlo-Simulation*, welche im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird, kurz vorgestellt. Beide Methoden sind auch im *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM) festgehalten [25]. Der GUM ist ein Verfahren, mit dem Unsicherheitsquantifizierungen für Messverfahren durchgeführt werden. Der Ansatz ist zu numerischen Berechnungen äquivalent, da auch Messverfahren auf der Auswertung von Modellen beruhen. Daher können die Verfahren sowohl für die Berechnung als auch für Messungen angewendet werden.

Unabhängig von dem verwendeten Verfahren zur Unsicherheitsquantifizierung müssen zunächst die stochastischen Eigenschaften der Eingangsgrößen des Systems bekannt sein. Die Eingangsgrößen werden als Zufallsvariablen modelliert. Jeder Zufallsvariable werden eine geeignete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die für die gewählte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erforderlichen Parameter zugeordnet. Bereits dieser Schritt erfordert, wenn nicht bereits aus anderen Quellen verlässliche Informationen über die Art der Unsicherheit der Eingangsgrößen vorliegen, die Lösung eines inversen Problems. Die Werte, welche die Zufallsvariablen annehmen können, werden als *Realisierungen* bezeichnet. In der Praxis werden dazu häufig mittels Pseudo-Zufallszahl-Generatoren Werte aus den jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen gezogen.

Das analytische Verfahren

Das analytische Verfahren zur Unsicherheitsquantifizierung nach [34] ist für lineare Modelle und normalverteilte Eingangsgrößen exakt, für schwach nichtlineare Modelle und nicht-normalverteilte Eingangsgrößen liefert es eine Näherung der Unsicherheit der Ausgangsgröße. Für die folgenden Darstellungen wird eine Modellfunktion \mathcal{M} definiert, welche das Ergebnis des Modells Y abhängig von dem Vektor der Eingangsgrößen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_u)$ berechnet:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.31)$$

Aufgrund der erforderlichen Ableitungen muss, für eine exakte Lösung, die Modellfunktion explizit angebar sein. Allerdings können die erforderlichen Ableitungen grundsätzlich auch näherungsweise durch Parametervariation, wie beispielsweise in Abschnitt 2.3.2, ermittelt werden. Aus der Modellfunktion kann der *Erwartungswert*

der Ergebnisgröße $\mathbb{E}[Y]$ nach Gleichung (2.32) berechnet werden. Dazu werden die Erwartungswerte der Eingangsgrößen in die Modellfunktion (2.31) eingesetzt:

$$\mathbb{E}[Y] \cong \mathcal{M}(\mathbb{E}[x_1], \mathbb{E}[x_2], \dots, \mathbb{E}[x_u]) \quad . \quad (2.32)$$

Für numerische Berechnungen sind die Erwartungswerte der Eingangsgrößen zu meist bekannt und gehen in die Definition der zugehörigen Zufallsvariablen ein. Ist der Erwartungswert nicht bekannt, so kann dieser mittels des arithmetischen Mittelwertes aus Realisierungen der Zufallsvariablen, beispielsweise aus Messergebnissen, gewonnen werden. Die *Varianz* der Ergebnisgröße wird entsprechend Gleichung (2.33) bestimmt. Die partiellen Ableitungen der Ergebnisgröße nach den Eingangsgrößen werden auch als Sensitivitätskoeffizienten bezeichnet. Die Darstellung in Gleichung (2.33) ist das Ergebnis einer Taylor-Reihenentwicklung erster Ordnung. Eine bessere Näherung kann durch Hinzunahme weiterer Terme erreicht werden.

$$\mathbb{V}[Y] \cong \sum_{i=1}^u \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i} \right)^2 \mathbb{V}[x_i] \quad (2.33)$$

Die Gleichungen (2.32) und (2.33) gehen von *unkorrelierten* Eingangsgrößen aus. Ob eine Korrelation der Eingangsgrößen vorliegt, kann anhand der Kovarianz ermittelt werden. Für ideal unkorrelierte Eingangsgrößen verschwindet die Kovarianz. In [25] ist für den Fall korrelierter Eingangsgrößen eine Erweiterung von Gleichung (2.33) angegeben, welche die Korrelation der Eingangsgrößen mittels des Korrelationskoeffizienten berücksichtigt.

Die Monte Carlo-Simulation

Die Monte Carlo-Methode oder Monte Carlo-Simulation (MCS) simuliert die Propagation der Unsicherheit durch das Modell. Dazu wird die Modellfunktion \mathcal{M} sehr häufig ausgewertet. Für jede Funktionsauswertung werden Realisierungen der Zufallsvariablen aller Eingangsgrößen gezogen und in die Modellfunktion eingesetzt. Als Ergebnis werden Realisierungen der zur Ergebnisgröße Y gehörenden Zufallsvariablen erhalten. Aus allen Realisierungen der Ergebnisgröße werden die interessierenden stochastischen Eigenschaften ermittelt. Der Erwartungswert wird dazu mittels des arithmetischen Mittelwerts und die Varianz mittels der quadrierten empirischen Standardabweichung berechnet. Dabei wird das schwache *Gesetz der großen Zahlen* ausgenutzt. Danach konvergieren die aus den Realisierungen einer Zufallsvariable empirisch bestimmten Momente (hier: Erwartungswert und Varianz) gegen die Momente der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. [78, 83, 93]

Gegenüber dem analytischen Verfahren hat die MCS einige Vorteile. Zunächst ist die MCS einfach nachzuvollziehen und durchzuführen. Weiterhin ist sie universell einsetzbar. Während das analytische Verfahren nur für normalverteilte Eingangsgrößen

und lineare Modelle eine genaue Schätzung der Unsicherheit der Ausgangsgröße liefert, können mit der MCS beliebige Modelle und beliebige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Eingangsgrößen verwendet werden. Darüber hinaus liefert die MCS auch für korrelierte Eingangsgrößen korrekte Schätzungen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sowie der abgeleiteten Momente der Ergebnisgröße, diese werden mit dem analytischen Verfahren nur angenähert. Der entscheidende Nachteil der MCS ist der große Berechnungsaufwand. Die Fehler der mittels der MCS geschätzten Momente der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausgangsgröße konvergieren, sofern diese Momente existieren, typischerweise gegen Null. Allerdings ist die *Konvergenzrate* für die Anzahl der Simulationsdurchläufe N mit $\mathcal{O}(N^{-0.5})$ sehr langsam [30]. Für eine genaue Schätzung des Erwartungswertes sowie weiterer Momente der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ergebnisgröße müssen daher sehr viele Simulationen durchgeführt werden. Die Anzahl der erforderlichen Simulationen liegt für realistische Anwendungen häufig im Bereich einiger Tausend. Für zeitaufwändige numerische Berechnungen, beispielsweise mittels der FEM, sind einige Tausend Auswertungen des Modells aufgrund der zur Verfügung stehenden Zeit häufig nicht möglich. [30, 35]

Aufgrund der niedrigen Konvergenzrate der MCS haben sich in diesem Feld zwei wesentliche Forschungsrichtungen ausgebildet, die Beschleunigung der Modellauswertung und die Erhöhung der Konvergenzrate. Die Beschleunigung der Modellauswertung entspricht in weiten Teilen den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Verfahren. Dabei wird die Modellauswertung dadurch beschleunigt, dass vor Beginn der MCS ein reduziertes Modell erzeugt wird. Die MCS wird dann nur unter Verwendung dieses reduzierten Modells durchgeführt. Eine Sonderstellung nehmen die Multi-Fidelity-Verfahren ein. Dabei werden sowohl das Referenzmodell als auch das oder die reduzierten Modelle für die MCS verwendet, wobei das Referenzmodell möglichst selten eingesetzt wird. Neben der Beschleunigung der Modellauswertung ist die Erhöhung der Konvergenzrate der MCS ein wichtiges Feld. Dabei wird die rein zufallsbasierte Ziehung von Realisierungen der Zufallsvariablen der Eingangsgrößen durch deterministische Sequenzen oder Abwandlungen der MCS ersetzt. Diese Verfahren sind so konstruiert, dass sie den durch die Zufallsvariablen aufgespannten Parameterraum möglichst gleichmäßig füllen. Dadurch wird eine höhere Konvergenzrate der MCS erreicht. Bekannte Verfahren sind beispielsweise die Nutzung von SOBOL-Sequenzen und die Stratified-Monte Carlo-Methode [30].

2.3.2. Verfahren der Sensitivitätsanalyse

Eine bei der Beschreibung realer Systeme (bzw. des Realitätsmodells, vgl. Abschnitt 1.1) interessierende Eigenschaft ist der Einfluss der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße oder die Ausgangsgrößen. Diese Frage ist sowohl im Rahmen der numerischen Berechnung als auch in der Messtechnik von Bedeutung. In der Messtechnik ist diese Frage ein Teilbereich des *Design of Experiment* (DOE). Die innerhalb des DOE zusammengefassten Methoden haben das gemeinsame Ziel, mit

möglichst wenigen Experimenten möglichst viele Informationen über das Systemverhalten unter variierenden Eingangsgrößen zu erhalten. Der Prozess der Informationsgewinnung wird *Sensitivitätsanalyse* genannt [51, 59, 71, 96, 97]. Etwas allgemeiner beschreibt SALTELLI die Sensitivitätsanalyse als die Untersuchung, wie sich die Unsicherheitsbeiträge der Eingangsgrößen auf die Unsicherheit der Ausgangsgröße verteilen [112, 113]. Für den Prozess der Sensitivitätsanalyse werden die Ansätze der *lokalen* und *globalen* Sensitivitätsanalyse unterschieden. Dabei ist der Begriff globale Sensitivitätsanalyse ein Oberbegriff für eine ganze Klasse stochastischer Methoden. Beispielsweise gehören dazu der *Morris Test*, *varianzbasierte Methoden* und *Metamodell basierte Methoden* [94, 120, 122]. Nachfolgend werden gegenüberstellend kurz die lokale Sensitivitätsanalyse und die in dieser Arbeit verwendete varianzbasierte Methode zur globalen Sensitivitätsanalyse nach SALTELLI und SOBOL vorgestellt. Im Gegensatz zu den anderen genannten Methoden handelt es sich bei dem Morris Test um ein so genanntes Screening-Verfahren. Das Ziel der Methode besteht nicht in der genauen Ermittlung der Sensitivitätskoeffizienten der Ausgangsgröße gegenüber den Eingangsgrößen, sondern in der Ermittlung einer Rangfolge der Eingangsparameter und ihrer Sensitivität. Die Verfahren auf Basis von Metamodellen verwenden zur Ermittlung der Sensitivitätskoeffizienten ebenfalls die varianzbasierten Methoden. Diese werden jedoch nicht auf das Referenzmodell, sondern auf reduzierte Modelle und vor allem analytisch vorliegende Metamodelle angewendet. Eine Ausnahme bilden Metamodelle auf Basis der Methode der Polynomial Chaos Expansion (PCE). Aufgrund der Eigenschaften der PCE lassen sich die Sensitivitätskoeffizienten aus den Koeffizienten des Metamodells direkt ableiten [49, 120].

Lokale Sensitivitätsanalyse

Im mathematischen Sinn ist die Sensitivität einer Ausgangsgröße gegenüber den Eingangsgrößen identisch mit der Ableitung der Ausgangsgröße nach den Eingangsgrößen [112]. Dieser Umstand wird auch für das analytische Verfahren im Rahmen des GUM genutzt, vgl. Gleichung (2.33). Für eine Ausgangsgröße Y wird die Sensitivität gegenüber einer Eingangsgröße x_i durch den Sensitivitätskoeffizienten S^i charakterisiert nach:

$$S^i = \frac{\partial Y}{\partial x_i} \quad . \quad (2.34)$$

Die Auswertung der Sensitivitätskoeffizienten erfordert die Bildung der Ableitungen der Modellgleichung (2.31). Für mathematische Modelle kann die Ableitung häufig analytisch ausgewertet werden, für numerische Modelle wird die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt oder auf anderem Wege bestimmt. Dazu werden

die Eingangsgrößen x_i um einen kleinen Betrag Δx_i variiert. Mit dem zentralen Differenzenquotient kann Gleichung (2.34) umformuliert werden zu:

$$S^i = \frac{\mathcal{M}(\mathbf{x}_{x_i + \Delta x_i}) - \mathcal{M}(\mathbf{x}_{x_i - \Delta x_i})}{2 \Delta x_i} . \quad (2.35)$$

Der große Vorteil der lokalen Sensitivitätsanalyse ist der geringe Berechnungsaufwand zur Ermittlung der Sensitivitätskoeffizienten. Weiterhin sind die ermittelten Sensitivitätskoeffizienten für lineare Modelle mathematisch exakt. Für nichtlineare Modelle sind die ermittelten Sensitivitätskoeffizienten dagegen von dem für die Berechnung verwendeten Wert von x_i und der Variation Δx_i abhängig. Sind die Eingangsgrößen zusätzlich unsicher und ist der Grad der Unsicherheit der Eingangsgrößen deutlich verschieden, so liefert die lokale Sensitivitätsanalyse keine verlässlichen Aussagen mehr. Diese Nachteile umgeht die globale Sensitivitätsanalyse [112].

Varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse

Die nachfolgend vorgestellte Idee der globalen, varianzbasierten Sensitivitätsanalyse geht auf das Konzept nach SOBOL zurück. Nachfolgend wird nur noch von der globalen Sensitivitätsanalyse gesprochen, gemeint ist immer die varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse. Für eine vollständige Herleitung der Methode sei auf das Grundlagenwerk von SALTELLI ET AL. [112] sowie die Arbeit von SOBOL [116] verwiesen.

Ausgangspunkt für die Herleitung der globalen Sensitivitätsanalyse ist die Modellfunktion (2.31). Diese wird in die endliche Summe in Gleichung (2.36) zerlegt. Für eine Modellfunktion mit u Eingangsgrößen hat die Summe in Gleichung (2.36) 2^u Terme:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \sum_i \mathcal{M}_i + \sum_i \sum_{j>i} \mathcal{M}_{ij} + \dots + \mathcal{M}_{12\dots u} . \quad (2.36)$$

In Gleichung (2.36) sind die einzelnen Terme ebenfalls Funktionen, die jeweils nur von den in ihrem Index genannten Eingangsgrößen abhängen. Diese Darstellung der Modellfunktion wird auch als *high-dimensional model representation* (HDMR) bezeichnet. Unter Verwendung dieser Zerlegung können mittels einer MCS bedingte Erwartungswerte und bedingte Varianzen berechnet werden. Die Varianz der Funktionen erster Ordnung in Gleichung (2.36) lässt sich schreiben als:

$$\mathbb{V}[\mathcal{M}_i(x_i)] = \mathbb{V}[\mathbb{E}[(Y|x_i)]] . \quad (2.37)$$

Der Ausdruck in Gleichung (2.37) beschreibt den Anteil der Varianz der Ausgangsgröße Y , der durch die Varianz der Eingangsgröße x_i verursacht wird. Wird dieser

Ausdruck auf die Gesamtvarianz der Ausgangsgröße bezogen, so ergibt sich der Sensitivitätskoeffizient erster Ordnung S_1^i , auch *Haupteffekt*, in Gleichung (2.38) [112]. Die Terme höherer Ordnung in Gleichung (2.36) können analog zu dem Haupteffekt als Wechselwirkungseffekte interpretiert werden. Wechselwirkungen treten dann auf, wenn die gemeinsame Auswirkung mehrerer Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße nicht als Summe der einzelnen Wirkungen erklärbar ist. Die Gesamtwirkung einer Eingangsgröße auf die Ausgangsgröße, unabhängig davon ob es sich um direkte Wirkung oder Wechselwirkung mit anderen Eingangsgrößen handelt, wird durch den *Totaleffekt* S_T^i , vgl. Gleichung (2.39), beschrieben. Dazu wird die, aufgrund der Varianz aller Eingangsgrößen außer der Größe x_i , in der Ausgangsgröße erzeugte Varianz ($\mathbb{V}[\mathbb{E}[(Y|\mathbf{x}_{\sim i})]]$) auf die Gesamtvarianz der Ausgangsgröße bezogen. Die Differenz dieses Wertes zu eins ist der Totaleffekt der Größe x_i .

Die Ermittlung der verschiedenen Sensitivitätskoeffizienten, also der Haupt-, Wechselwirkungs- und Totaleffekte, erfolgt mittels der Quasi-Monte Carlo-Methode. Dazu wird eine $(N, 2u)$ -Matrix aus Zufallszahlen erstellt. Darin ist N die Anzahl der durchzuführenden Simulationen und u die Anzahl der Eingangsgrößen. Die Zufallszahlen werden üblicherweise mittels der SOBOL-Sequenz erstellt, es sind somit Quasi-Zufallszahlen. Sie sind Realisierungen der als Zufallsvariable modellierten Eingangsgrößen der Modellfunktion. Die so erstellte Matrix aller Eingangsgrößen wird in die Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} zerlegt. Dabei enthalten \mathbf{U} und \mathbf{V} je eine Hälfte aller Spalten der Ausgangsmatrix. Weiterhin werden die Matrizen \mathbf{W}_i erstellt. Sie werden jeweils durch die Spalten der Matrix \mathbf{V} gebildet, außer der i -ten Spalte. Die i -te Spalte wird durch die i -te Spalte der Matrix \mathbf{U} ersetzt. Mit den Ergebnisgrößen $Y_{\mathbf{U}} = \mathcal{M}(\mathbf{U})$, $Y_{\mathbf{V}} = \mathcal{M}(\mathbf{V})$ und $Y_{\mathbf{W}_i} = \mathcal{M}(\mathbf{W}_i)$ lassen sich die Gleichungen für den Haupteffekt (vgl. Gleichung (2.38)) und des Totaleffektes (vgl. Gleichung (2.39)) der i -ten Eingangsgröße berechnen:

$$S_1^i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[(Y|x_i)]]}{\mathbb{V}[Y]} \approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_{\mathbf{U}}^{(j)} Y_{\mathbf{W}_i}^{(j)} - G^2}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(Y_{\mathbf{U}}^{(j)}\right)^2 - G^2} \quad (2.38)$$

$$S_T^i = 1 - \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[(Y|\mathbf{x}_{\sim i})]]}{\mathbb{V}[Y]} \approx 1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_{\mathbf{V}}^{(j)} Y_{\mathbf{W}_i}^{(j)} - G^2}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(Y_{\mathbf{U}}^{(j)}\right)^2 - G^2} . \quad (2.39)$$

Die in den Gleichungen (2.38) und (2.39) verwendete Größe G ist der Mittelwert der Modellauswertungen mit den in der Matrix \mathbf{U} gegebenen Eingangsgrößen nach:

$$G^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_{\mathbf{U}}^{(j)} \right)^2 . \quad (2.40)$$

Mit der globalen Sensitivitätsanalyse steht eine Methode zur Verfügung, welche Sensitivitätsanalysen für Modelle beliebiger Nichtlinearität mit unsicheren Eingangsgrößen ermöglicht. Die Methode nutzt zur Ermittlung der Sensitivitätskoeffizienten eine Zerlegung der Varianz der Ausgangsgröße. Dazu werden Realisierungen Ausgangsgröße mit der Monte Carlo-Methode ermittelt. Eine Verbesserung der Konvergenzrate wird durch die Nutzung der Quasi-Monte Carlo-Methode oder der SOBOL-Sequenz erreicht. Somit erfordert die Methode sehr viel Berechnungszeit, da die Konvergenzrate der Monte Carlo-Simulation, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, sehr langsam ist. Häufig genutzte Ansätze zur Verbesserung des Verfahrens sind auch hier die Nutzung reduzierter Modelle um die für die Auswertung der Modelle erforderliche Rechenzeit zu minimieren, siehe beispielsweise [53, 70, 99, 120].

3. Entwicklung des Multi-Modell-Verfahrens

In diesem Kapitel wird das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Berechnungsverfahren vorgestellt. Ziel des Verfahrens ist es, die für eine FEM-Berechnung in der Akustik erforderliche Berechnungszeit zu reduzieren. Dazu wird zunächst das Ziel der Berechnung formuliert und anschließend die Grundidee des Verfahrens abgeleitet. Darauf aufbauend wird der Algorithmus vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einer Übertragung des Verfahrens auf Anwendungen in der Unsicherheitsquantifizierung.

3.1. Die Idee des Verfahrens

Nachfolgend wird die Grundidee des Verfahrens an einem Beispiel erläutert. Es wird der Pegel der mittleren quadratischen Schnelle einer umseitig eingespannten Stahlplatte berechnet. Das verwendete Geometriemodell sowie die Parameter der Modellierung sind in Abschnitt 4.4 ausführlich dargestellt. Der Frequenzbereich der Berechnung ist 100 – 1.500 Hz mit 281 Frequenzstützstellen. Die Frequenzauflösung beträgt somit 5 Hz. Das Materialmodell ist homogen und isotrop. Als Elementtyp für die Berechnung mittels der FEM werden Schalenelemente mit der Plattenformulierung von MINDLIN verwendet. Die Berechnung wird mit verschiedenen Diskretisierungen durchgeführt. Variiert wird hier somit das numerische Modell der Platte. Das Modell mit der feinsten Diskretisierung ('Modell 1') verwendet 21.942 FHG und eine Elementkantenlänge von $\beta = 0,035$ m. Für die höchste zu berechnende Frequenz stellt dieses Modell eine Diskretisierung von zehn Knoten je Biegewellenlänge sicher. Die weiteren Modelle verwenden größere Elementkantenlängen zur Diskretisierung der Geometrie und sind somit nur für einen eingeschränkten Frequenzbereich anwendbar. Das 'Modell 2' verwendet 6.438 FHG und erreicht die Grenze von zehn Knoten je Biegewellenlänge bei einer Frequenz von 500 Hz. 'Modell 3' (3.078 FHG) und 'Modell 4' (1.890 FHG) sind jeweils bis zu einer Frequenz von 220 Hz bzw. 125 Hz einsetzbar. In Abbildung 3.1 sind die Berechnungsergebnisse mit den verschiedenen Diskretisierungen dargestellt. Dabei ist in der oberen Darstellung für alle vier Modelle der berechnete Pegel der mittleren quadratischen Schnelle über der Frequenz aufgetragen. In der unteren Darstellung ist die Abweichung der vereinfachten Modelle '2'-'4' von der mit 'Modell 1' berechneten Lösung dargestellt. Dazu wird der Betrag der Pegeldifferenz über der Frequenz aufgetragen. Der Übersichtlichkeit werden die Kurven mit einem gleitenden Mittelwert über zehn Frequenzstützstellen geglättet.

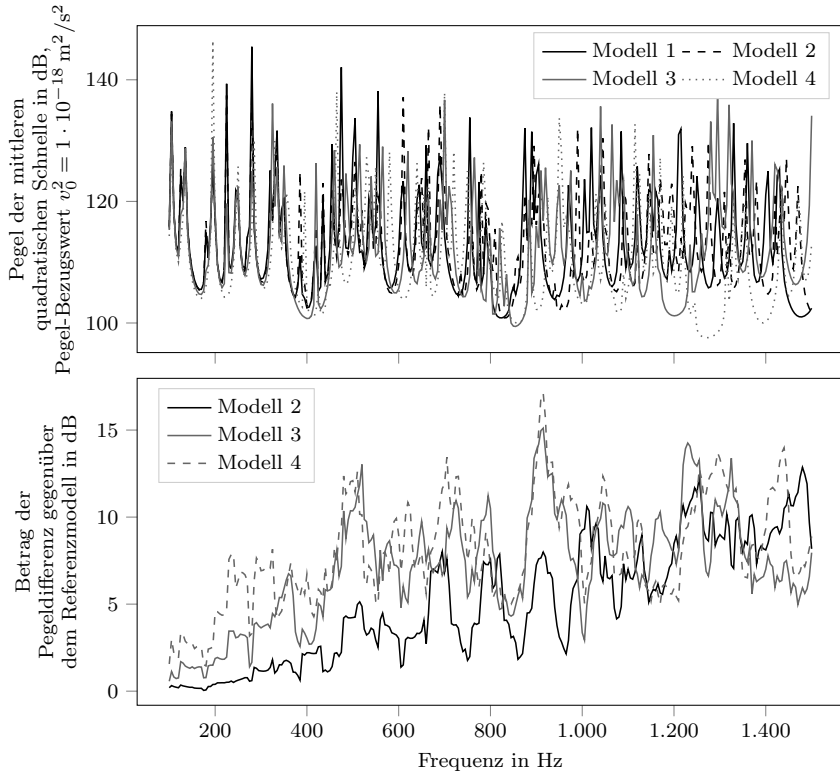


Abbildung 3.1.: Berechneter Frequenzgang der mittleren quadratischen Schnelle der umseitig eingespannten Platte. Berechnung mit vier verschiedenen Diskretisierungen (oben), Betrag der Pegeldifferenz der vereinfachten Modelle gegenüber dem Referenzmodell (unten).

Anhand der Frequenzgänge in der oberen Darstellung in Abbildung 3.1 ist zu erkennen, dass im unteren Frequenzbereich unterhalb ca. 200 Hz keine großen Unterschiede des Berechnungsergebnisses zwischen allen Diskretisierungen auftreten. Die Abweichung (vgl. Abbildung 3.1 unten) gegenüber dem ‘Modell 1’ ist für fast alle vereinfachten Modelle unterhalb 200 Hz kleiner als 3,0 dB. Oberhalb dieser Frequenz steigt die Abweichung von ‘Modell 4’ deutlich an, auch die Abweichung von ‘Modell 3’ nimmt zu. Wird die zunächst willkürlich gewählte Grenze von 3,0 dB weiter betrachtet, so wird diese Grenze durch das Modell mit der größten Diskretisierung, ‘Modell 4’, bei 125 Hz erreicht. Die Modelle ‘Modell 3’ und ‘Modell 2’ erreichen diese Grenze jeweils bei 230 Hz und 480 Hz. Aufgrund der Anwendung des gleitenden Mittelwerts sind diese Werte eher optimistisch. Dennoch stimmen sie gut mit den,

anhand der Forderung von zehn Knoten je Biegewellenlänge, erwarteten Grenzen der Einsatzbereiche überein.

Neben der Abweichung der berechneten mittleren quadratischen Schnelle unterscheiden sich die numerischen Modelle hinsichtlich der Anzahl der FHG. Entsprechend der Anzahl der FHG nimmt für die verschiedenen Modelle die erforderliche Rechenzeit zur Lösung zu. Tabelle 3.1 gibt die Anzahl der FHG der numerischen Modelle sowie die Rechenzeit¹ für eine Frequenzstützstelle an. Gut zu erkennen ist die überlineare Abhängigkeit der Rechenzeit von der Anzahl der FHG der verschiedenen Modelle.

Tabelle 3.1.: Anzahl FHG und Rechenzeit je Frequenzstützstelle der Modelle zur Demonstration der Verfahrensidee

Diskretisierung	Anzahl FHG	Rechenzeit / Frequenzstützstelle
‘Modell 4’	1.890	0,34 s
‘Modell 3’	3.078	0,57 s
‘Modell 2’	6.438	1,69 s
‘Modell 1’	21.942	10,56 s

Wird die gesamte Berechnungsaufgabe mit dem numerischen ‘Modell 1’ durchgeführt und keinerlei Parallelisierung berücksichtigt, so ergibt sich die insgesamt erforderliche Rechenzeit als Produkt der Anzahl der Frequenzstützstellen und der je Frequenzstützstelle erforderlichen Rechenzeit:

$$281 \cdot 10,56 \text{ s} = 2.967,36 \text{ s} \approx 49,5 \text{ min} \quad . \quad (3.1)$$

Dabei werden alle 281 Berechnungen nacheinander auf einem Prozessor durchgeführt. Wie bereits erwähnt liefern die vereinfachten numerischen Modelle, im Rahmen des Fehlerkriteriums von 3,0 dB Abweichung gegenüber ‘Modell 1’, jeweils bis zu einer Frequenz von 125 Hz (‘Modell 4’), 230 Hz (‘Modell 3’) und 480 Hz (‘Modell 2’) ähnlich gute Ergebnisse wie das ‘Modell 1’. Der Frequenzbereich 100 – 125 Hz umfasst hier sechs, der Frequenzbereich 130 – 230 Hz umfasst 21 Frequenzstützstellen. Auf die Frequenzbereiche 235 – 480 Hz und 485 – 1.500 Hz entfallen jeweils 51 bzw. 204 Frequenzstützstellen. Werden die unteren drei Frequenzbereiche jeweils mit den korrespondierenden vereinfachten numerischen Modellen berechnet, so ergibt sich die Rechenzeit zu ca. 37,6 min:

$$\underbrace{6 \cdot 0,34 \text{ s}}_{\text{‘Modell 4’}} + \underbrace{21 \cdot 0,57 \text{ s}}_{\text{‘Modell 3’}} + \underbrace{51 \cdot 1,69 \text{ s}}_{\text{‘Modell 2’}} + \underbrace{204 \cdot 10,56 \text{ s}}_{\text{‘Modell 1’}} = 2.254,44 \text{ s} \approx 37,6 \text{ min} \quad . \quad (3.2)$$

¹Im Rahmen der Arbeit wird der Aufwand zur Lösung eines Gleichungssystems durch Messung der erforderlichen Rechenzeit ermittelt. In Kapitel 4 ist die verwendete Hardware angegeben

Gegenüber der direkten Lösung der Berechnungsaufgabe mit dem Modell mit dem ‘Modell 1’ (vgl. Gleichung (3.1)) ist somit eine Ersparnis von etwa 24 % möglich. Die Idee der vorliegenden Arbeit ist es, den Frequenzgang einer Ergebnisgröße eines Referenzmodells, hier das ‘Modell 1’, unter Verwendung von vereinfachten Modellen, hier den numerischen Modellen ‘2’-‘4’, zu approximieren. Dies ermöglicht einen Rechenzeitvorteil gegenüber der direkten Berechnung des Referenzmodells. Dabei werden die vereinfachten Modelle zur Laufzeit hinsichtlich ihrer Eignung durch Nutzung von Validierungskriterien überprüft und entsprechend verwendet.

3.2. Anforderungen an das Verfahren

In Abschnitt 2.2 werden verschiedene Techniken vorgestellt, um FEM-Berechnungen zu beschleunigen. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren zielt speziell auf die Beschleunigung einer FEM-Berechnung im Bereich der Akustik. Daher werden nachfolgend die Eigenschaften bestehender Verfahren kurz zusammengefasst und daraus Anforderungen für ein neues Verfahren abgeleitet.

Die in Abschnitt 2.2.3 vorgestellten Verfahren zur Modellreduktion reduzieren den Berechnungsaufwand durch eine Reduktion der nach der Anwendung der FEM entstehenden Gleichungssysteme. Die Verfahren gehen somit von einem, während des Modellierungsprozesses festgelegten, mathematischen Modell aus und erzielen eine Näherungslösung des numerischen Modells. Die zur Klasse des Modalen Abschneidens gehörenden Methoden erfordern, zur Erstellung des reduzierten Modells, zunächst die Ermittlung der Eigenvektoren. Die aus den Eigenvektoren gewählte modale Basis spannt einen niedrigdimensionalen Unterraum auf, mittels dem Näherungslösungen berechnet werden. Somit ist vor der Berechnung des Frequenzgangs die Lösung des Eigenwertproblems erforderlich. Für Systeme mit sehr vielen Eigenfrequenzen innerhalb des interessierenden Frequenzbereichs, also sehr großer modaler Dichte, ist die Lösung des Eigenwertproblems sehr aufwändig [62]. Weiterhin muss eine geeignete modale Basis zur Erstellung des reduzierten Modells sehr viele Eigenvektoren des Referenzmodells enthalten. Dadurch wird die erreichbare Reduktion verringert. Daher sind die auf dem modalen Abschneiden basierenden Modellreduktionsverfahren vor allem für Systeme mit geringer modaler Dichte gut geeignet. Demgegenüber nutzen die auf Basis einer Padé-Approximation basierenden Verfahren Projektionen des zu lösenden Gleichungssystems in niedrigdimensionale Unterräume um Transferfunktionen des zu berechnenden Systems zu schätzen. Dabei werden mehrere numerische Modelle gemeinsam genutzt. Diese Verfahrensklasse erzielt vor allem dann gute Ergebnisse, wenn die Anzahl der FHG, zwischen denen die Transferfunktionen ermittelt werden, klein gegen die Anzahl der FHG des Ausgangssystems ist. Ein wesentlicher Vorteil dieser Verfahren ist die Verfügbarkeit von Fehlerschätzern der vereinfachten Modelle.

Die Verfahren der adaptiven Anpassung der Diskretisierung, siehe Abschnitt 2.2.4, bieten eine gute Möglichkeit zur Reduktion des Berechnungsaufwandes, da prinzi-

piell für jede zu berechnende Frequenzstützstelle eine geeignete Diskretisierung ermittelt werden kann. Vor allem das Konzept der p -Verfeinerung, also die Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktionen, ermöglicht auf einfache Weise höherwertige numerische Modelle, da keine aufwändige erneute Diskretisierung erforderlich ist. Eine Herausforderung dieser Verfahren liegt in der Fehlerschätzung, auf der die Verfeinerung der Diskretisierung beruht. Auch diese Methoden verwenden für alle Frequenzstützstellen das selbe mathematische Modell.

Einen Ansatz zur Nutzung verschiedener mathematischer Modelle innerhalb einer Berechnung bieten die in Abschnitt 2.2.5 vorgestellten Multi-Fidelity-Verfahren. Diese Verfahrensklasse stellt an die verwendeten Modelle nur die Forderung, die Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen abzubilden. Allerdings sind die in [104, 105] vorgestellten Ansätze für die Verwendung in Vielfachauswertungs-Anwendungen konstruiert. Diese Art der Berechnungen ist im Rahmen von Unsicherheitsquantifizierung mit der MCS üblich. Dabei wird ein Modell sehr oft mit variierten Eingangsgrößen ausgewertet. Die Multi-Fidelity-Verfahren verteilen den dazu erforderlichen Berechnungsaufwand auf verschiedene Modelle unterschiedlicher Komplexität. Anhand des jeweils erforderlichen Berechnungsaufwandes sowie der jeweiligen Ergebnisqualität werden die Modelle bewertet. Auf Basis dieser Bewertung wird mittels der Modell-Management-Strategie entschieden, wann welches Modell eingesetzt wird. Die Bestimmung des Berechnungsaufwands und der Ergebnisqualität der verwendeten Modelle erfordert mindestens einmal die vollständige Auswertung aller Modelle. Für die Nutzung in Vielfachauswertungs-Anwendungen sind die Verfahren einsetzbar, zur Beschleunigung einer einzelnen Berechnung sind sie nicht direkt geeignet.

Um die Nachteile der bereits existierenden Ansätze zur Beschleunigung von FEM-Berechnungen auszugleichen wird in dieser Arbeit ein alternatives Verfahren entwickelt. Dieses Verfahren wird *Multi-Modell-Verfahren* genannt und speziell für die Beschleunigung von FEM-Berechnungen im Frequenzbereich konstruiert. Das Verfahren approximiert den Frequenzgang einer Ergebnisgröße eines Referenzmodells. Dazu verwendet das Verfahren, ähnlich den Multi-Fidelity-Verfahren, zusätzlich zu dem Referenzmodell vereinfachte Modelle. Durch die Nutzung der vereinfachten Modelle wird der Berechnungsaufwand insgesamt reduziert. Dieses Ziel wird in Hypothese 1 (vgl. Abschnitt 1.3) aufgegriffen. Für das Multi-Modell-Verfahren wird, analog zu den Multi-Fidelity-Verfahren, eine *Modell-Management-Strategie* entwickelt. Die Entwicklung dieser Modell-Management-Strategie ist der Kern der vorliegenden Arbeit. Durch einen Validierungsprozess ermittelt die Modell-Management-Strategie die Einsetzbarkeit der zur Verfügung stehenden Modelle. Dazu werden Frequenzgruppen als Teilmengen des insgesamt auszuwertenden Frequenzbereichs definiert. Die zur Verfügung stehenden Modelle werden jeweils für die Frequenzgruppen separat validiert. Bei erfolgreicher Validierung wird das jeweilige Modell in diesen Frequenzgruppen eingesetzt. Im Unterschied zu den Multi-Fidelity-Verfahren wird die Modell-Management-Strategie so konstruiert, dass Validierung und Einsatz der Modelle zur Laufzeit des Prozesses umgesetzt werden. Dadurch ermöglicht das Multi-Modell-Verfahren einen Rechenzeitvorteil für eine einmal durchzuführende Be-

rechnung (vgl. Hypothese 2). Die Modell-Management-Strategie wird als Algorithmus definiert, der die Auswertung der einzelnen Modelle steuert. Ebenfalls analog zu den Multi-Fidelity-Verfahren können für das Multi-Modell-Verfahren beliebige vereinfachte Modelle verwendet werden. Die Ableitung vereinfachter Modelle erfolgt durch Variation des mathematischen und des numerischen Modells sowie durch Variation des Realitätsmodells (Hypothese 3). Neben einer einfachen Berechnung kann das Multi-Modell-Verfahren auch für Vielfachauswertungs-Anwendungen im Rahmen der Unsicherheitsquantifizierung verwendet werden. Dazu werden die, während des ersten Durchlaufs des Verfahrens, ermittelten Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle gespeichert. Für jede folgende Berechnung wird diese Information wiederverwendet, dadurch wird der Schritt der Validierung übersprungen. Dies resultiert in einer weiteren Beschleunigung der Berechnung (Hypothese 4).

3.3. Anforderungen an die Modelle

Das zu entwickelnde Verfahren nutzt neben dem Referenzmodell verschiedene vereinfachte Modelle. Diese Modelle werden von dem Referenzmodell abgeleitet. Die dazu erforderlichen Vereinfachungen können auf allen Ebenen des Modellierungsprozesses eingeführt werden. Neben vereinfachten numerischen Modellen können somit auch alternative mathematische Modelle verwendet werden. Für die Entwicklung des Algorithmus werden die Modelle als gegeben angenommen, ihre Struktur wird durch das Verfahren nicht berücksichtigt. Die Modelle werden, entsprechend Gleichung (3.3), als Abbildungsfunktion \mathcal{M} des Vektors der Eingangsgrößen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_u)$ auf den Frequenzgang $Y(f)$ betrachtet. Neben den Eingangsgrößen geht in die Modelle die Frequenz als skalarer Parameter ein:

$$Y(f) = \mathcal{M}(\mathbf{x}, f) \quad . \quad (3.3)$$

Es werden folgende Anforderungen an die vereinfachten Modelle gestellt:

Identische Eingangsgrößen Für alle vereinfachten Modelle werden die selben Eingangsgrößen wie für das Referenzmodell verwendet. Dadurch wird sichergestellt, dass jedem Modell die selben Informationen zur Verfügung stehen. Allerdings muss nicht jedes vereinfachte Modell alle zur Verfügung gestellten Eingangsgrößen für die Berechnung der Lösung verwenden.

Auswertung im gesamten Frequenzbereich Alle Modelle sind an allen Frequenzstützstellen innerhalb des interessierenden Frequenzbereichs auswertbar.

Black-Box-Verhalten Das hier entwickelte Verfahren soll nur auf Basis der Ein- und Ausgangsgrößen der Modelle angewendet werden können, die Modelle werden somit als „Black-Box“ betrachtet. Die Black-Box stellt nur die in Gleichung (3.3) eingeführte Abbildungsfunktion \mathcal{M} bereit. Das Verfahren orientiert sich somit an den Ansätzen der Multi-Fidelity-Verfahren.

3.4. Stetigkeit des berechneten Frequenzgangs

In Abschnitt 3.1 wird die Idee des zu entwickelnden Multi-Modell-Verfahrens vorgestellt. Abbildung 3.1 zeigt exemplarisch die berechneten Frequenzgänge von vier identischen mathematischen Modellen mit verschiedenen Diskretisierungen. In der oberen Darstellung ist der berechnete Frequenzgang für alle vier untersuchten, numerischen Modelle dargestellt. In der unteren Darstellung ist der Fehler der drei vereinfachten Modelle ('Modell 2-4') gegenüber dem Modell mit der feinsten Diskretisierung ('Modell 1') über der Frequenz aufgetragen. Die Schätzung der möglichen Rechenzeiterparnis in den Gleichungen (3.1)-(3.2) geht davon aus, dass bei Erreichen der in diesem Beispiel willkürlich gewählten, tolerierten Abweichung eines vereinfachten Modells von 3,0 dB gegenüber 'Modell 1' auf ein höherwertiges vereinfachtes Modell gewechselt wird. Dies erfolgt in diesem Beispiel an den Frequenzstützstellen 125 Hz ('Modell 4' zu 'Modell 3'), 230 Hz ('Modell 3' zu 'Modell 2') und 480 Hz ('Modell 2' zu 'Modell 1'). An diesen Stellen sind die Fehler der jeweils beteiligten Modelle nicht identisch. Dies führt letztlich für den berechneten Frequenzgang zu einem Sprung an den Stellen des Modellwechsels, der Frequenzgang wird *unstetig*. Dieser Effekt wird im Rahmen dieser Arbeit in Kauf genommen. Prinzipiell ist es denkbar, diesen Effekt durch ein Verfahren ähnlich des, im Rahmen von Modell-Management-Strategien für Multi-Fidelity-Verfahren verwendeten, Konzepts der Adaption zu kompensieren. Da bekannt ist, dass das höherwertige Modell näher an der Lösung des Referenzmodells liegt, können die Ergebnisse des einfacheren Modells mit denen des höherwertigen Modells korrigiert werden. Die beschriebene Unstetigkeit des Frequenzgangs wird kompensiert.

3.5. Die Konstruktion der Modell-Management-Strategie

Die Konstruktion der Modell-Management-Strategie zielt in erster Linie auf die Beschleunigung einer einmaligen FEM-Berechnung im Frequenzbereich ab. Während des Prozesses sind die verschiedenen, zur Verfügung stehenden Modelle auszuwerten und gegen das Referenzmodell zu validieren. Die Auswertung und Nutzung der vereinfachten Modelle anstelle des Referenzmodells reduziert den erforderlichen Berechnungsaufwand für die Berechnung der Lösung im gesamten Frequenzbereich. Demgegenüber erfordert der Validierungsprozess einen zusätzlichen Berechnungsaufwand. Es ist somit erforderlich, dass die Zeiterparnis durch den Einsatz der vereinfachten Modelle den zusätzlichen Berechnungsaufwand für den Validierungsprozess kompensiert. Die Validierung erfolgt für eine Frequenzstützstelle durch den Vergleich der Ausgangsgrößen des zu validierenden, vereinfachten Modells und des Referenzmodells. Für eine Validierung müssen somit immer sowohl das vereinfachte Modell als auch das Referenzmodell ausgewertet werden. Dies ist unabhängig davon, ob letztlich die Ausgangsgrößen des vereinfachten Modells oder des Referenzmodells verwendet werden. Um eine Kompensation des für die Validierung erforderlichen

Berechnungsaufwandes durch die Nutzung des vereinfachten Modells zu ermöglichen, wird der Frequenzbereich in *Frequenzgruppen* aufgeteilt. Die Validierung des vereinfachten Modells erfolgt jeweils für eine Frequenzgruppe an wenigen Frequenzstützstellen innerhalb der Frequenzgruppe. Dadurch kompensiert die Nutzung des vereinfachten Modells in der gesamten Frequenzgruppe den zusätzlichen Berechnungsaufwand für die Validierung.

Die Modell-Management-Strategie nimmt eine Anzahl Modelle Q entgegen, mittels derer die Lösung im gesamten Frequenzbereich berechnet werden soll. Die Lösung wird für den Frequenzbereich, bestehend aus n_f^{ges} Frequenzstützstellen mit der Frequenzauflösung δf , berechnet. Der Frequenzbereich wird in n_g Frequenzgruppen aufgeteilt. Die Ermittlung der Frequenzgruppen wird in Abschnitt 3.5.1 vorgestellt. Innerhalb jeder Frequenzgruppe wird ein Validierungsprozess durchgeführt. Dabei wird die Ausgangsgröße eines vereinfachten Modells mit der Ausgangsgröße des Referenzmodells verglichen. Der genaue Ablauf der Validierung und mögliche Herangehensweisen werden in Abschnitt 3.5.2 vorgestellt. Sofern die Validierung erfolgreich ist, wird das vereinfachte Modell anstelle des Referenzmodells verwendet. Das Ziel dieses Vorgehens ist es, dass die Nutzung eines vereinfachten Modells den für die Validierung zusätzlich erforderlichen Berechnungsaufwand mindestens kompensiert. Um diese Kompensation sicher zu stellen wird die *Budgetplanung*, vgl. Abschnitt 3.5.3, als Teil der Modell-Management-Strategie eingeführt. Insgesamt wird auf diese Weise eine Zeitersparnis erreicht. Für den Aufbau der Modell-Management-Strategie sind neben der Budgetplanung somit zwei weitere Konzepte wesentlich, das Konzept der *Frequenzgruppen* und das *Validierungskonzept*. Diese Konzepte werden nachfolgend erläutert.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die nachfolgend vorgestellte Modell-Management-Strategie sich von den für Multi-Fidelity-Verfahren verwendeten Modell-Management-Strategien unterscheidet. Die im Rahmen von Multi-Fidelity-Verfahren eingesetzten Modell-Management-Strategien sind vor allem so gewählt, dass das mit allen zur Verfügung stehenden Modellen gemeinsam erzielte Ergebnis gegenüber dem Ergebnis des Referenzmodells unverzerrt bleibt. Dieser Aspekt kann mit der hier vorgestellten Modell-Management-Strategie nur bedingt sicher gestellt werden, da im Gegensatz zu Multi-Fidelity-Verfahren das Referenzmodell nie vollständig ausgewertet wird. Demgegenüber ermöglicht das hier entwickelte Verfahren auch die Beschleunigung einer einzelnen Berechnung.

3.5.1. Das Konzept der Frequenzgruppen

Die Aufteilung des Frequenzgangs in Frequenzgruppen erfolgt mit dem Ziel, die vereinfachten Modelle für Frequenzbereiche zu validieren. Für jede Frequenzgruppe wird eines der zur Verfügung stehenden Modelle verwendet. Dabei wird das zu validierende Modell an wenigen Frequenzstützstellen innerhalb einer Frequenzgruppe gegen das Referenzmodell getestet. Die Ermittlung der Anzahl möglicher Testpunkte ist Teil der Budgetplanung. Ist für die Testpunkte der Test erfolgreich,

so gilt das vereinfachte Modell als erfolgreich validiert. Es kann dann anstelle des Referenzmodells innerhalb dieser Frequenzgruppe eingesetzt werden. Dabei wird die Annahme zugrunde gelegt, dass die Validierung an wenigen Frequenzstützstellen innerhalb einer Frequenzgruppe ausreichend ist.

Für die Einteilung des Frequenzgangs in Frequenzgruppen können verschiedene Ansätze verfolgt werden. Dazu wird zunächst angenommen, dass ein bekannter Frequenzgang vorliegt. Die entwickelte Modell-Management-Strategie ermittelt diesen, zur Festlegung der Frequenzgruppen erforderlichen, Frequenzgang iterativ anhand der vereinfachten Modelle, vgl. Abschnitt 3.5.3. In Abbildung 3.2 sind die im Rahmen dieser Arbeit erarbeiteten Varianten dargestellt. Als Beispiel wird der Frequenzgang der Schwingschnelle an einem Punkt einer umseitig momentenfrei gelagerten Platte verwendet. In Abbildung 3.2a ist der Ansatz dargestellt, eine Frequenzgruppe zwischen einem Minimum und einem Maximum des Frequenzgangs zu definieren. Dieser Ansatz wird gewählt, da innerhalb einer Frequenzgruppe der Frequenzgang ausschließlich monoton ansteigt oder abfällt. Das Ziel dieser Definition ist es, den Vergleich mit dem Frequenzgang eines anderen Modells durch möglichst wenige Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe zu ermöglichen.

Die zweite in dieser Arbeit verwendete Variante ist die Definition einer Frequenzgruppe zwischen zwei Minima des Frequenzgangs. Dies ist in Abbildung 3.2b dargestellt. Dabei beginnt eine Frequenzgruppe an einem Minimum des Frequenzgangs und erstreckt sich bis zum nächsten Minimum. Diese Definition der Frequenzgruppen ist für den Fall gedacht, dass vereinfachte Modelle schon aufgrund ihrer Konstruktion nur bestimmte Resonanzstellen des Referenzmodells abbilden können.

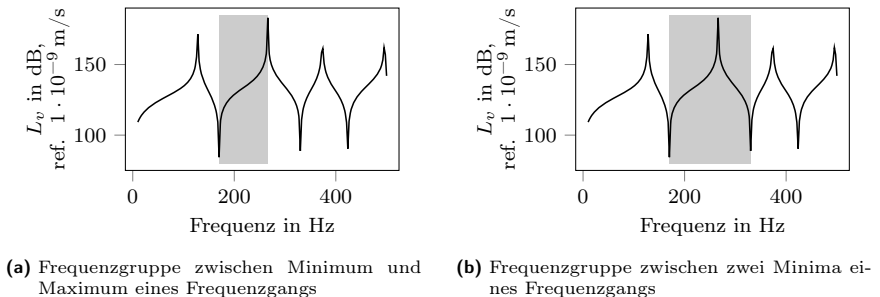


Abbildung 3.2.: In dieser Arbeit verwendete Ansätze zur Definition von Frequenzgruppen

Die vorgenannten Ansätze definieren die Grenzen der Frequenzgruppen abhängig von der Form des Frequenzgangs. Dadurch wird die Ausdehnung der Frequenzgruppen über den gesamten Frequenzbereich ungleichmäßig und die Anzahl der Frequenzgruppen ist im Vorfeld nicht bekannt. Innerhalb jeder Frequenzgruppe werden die vereinfachten Modelle an einer festgelegten Anzahl Testpunkte validiert. Jede Validierung erfordert die Auswertung sowohl des vereinfachten Modells als auch des

Referenzmodells. Somit führt eine zunehmende Anzahl Frequenzgruppen zu einem Anstieg des Berechnungsaufwandes. Dies kann dazu führen, dass die Zeitersparnis durch die Verwendung der vereinfachten Modelle den Berechnungsaufwand für die Validierung nicht mehr kompensiert. Dies wird durch die dritte Variante zur Definition der Frequenzgruppen umgangen.

Die dritte Möglichkeit zur Definition von Frequenzgruppen ist die gleichmäßige Verteilung einer gegebenen Anzahl Frequenzgruppen innerhalb des Frequenzbereiches. Dazu wird zunächst die mögliche Anzahl Frequenzgruppen bestimmt. Diese Frequenzgruppen werden dann gleichmäßig im Frequenzbereich verteilt. Dadurch wird sichergestellt, dass der Berechnungsaufwand für die Validierung die Zeitersparnis durch die Verwendung der vereinfachten Modelle nicht übersteigt.

3.5.2. Die Validierung an den Testpunkten

Innerhalb einer Frequenzgruppe wird genau eines der zur Verfügung stehenden Modelle verwendet. Dazu werden die vereinfachten Modelle gegen das Referenzmodell validiert. Wenn bei keinem vereinfachten Modell der Validierungsprozess erfolgreich ist, wird das Referenzmodell verwendet. Der Validierungsprozess erfolgt an einzelnen Frequenzstützstellen innerhalb einer Frequenzgruppe, den *Testpunkten*. Die Anzahl der Testpunkte wird mithilfe der Budgetplanung, siehe Abschnitt 3.5.3, ermittelt.

Validierungskriterien zum Vergleich der Ergebnisgrößen zweier Modelle

Der Validierungsprozess vergleicht den Wert der Systemantwort an einzelnen Frequenzstützstellen. Anhand des Ergebnisses dieses Vergleichs wird das Ergebnis des Validierungsprozesses auf Basis vorgegebener Kriterien ermittelt. Abbildung 3.3 zeigt schematisch den Validierungsprozess innerhalb einer Frequenzgruppe auf. Die zwei frequenzabhängigen Systemantworten (hier schwarz und grau) werden an den Testpunkten (hier drei) ausgewertet.

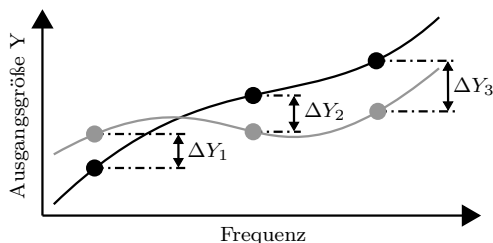


Abbildung 3.3.: Validierungskonzept der Systemantworten zweier Modelle (schwarz und grau) sowie drei schematisch eingezeichnete Testpunkte

Für den i -ten Testpunkt f_i^t ist die Differenz der Systemantworten ΔY_i :

$$\Delta Y_i = \Delta Y(f_i^t) = \left| Y(f_i^t)^{\text{Ref}} - Y(f_i^t)^{\text{VM}} \right|. \quad (3.4)$$

Die Lage der Testpunkte im Frequenzbereich wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Auf Basis eines im Vorfeld zu wählenden Validierungskriteriums Π wird anhand der Differenzen der Systemantworten das zu untersuchende Modell validiert. In dieser Arbeit werden folgende Validierungskriterien verwendet:

- Einfache Differenz (ED)
- Relative Differenz (RD)
- Einfache Pegeldifferenz (EPD)
- Mittlere Pegeldifferenz (MPD)
- Bhattacharyya-Koeffizient (BC)

Der Validierungsprozess anhand der *einfachen Differenz* verwendet die Differenz der Systemantworten ΔY_i direkt. Das Validierungskriterium Π^{ED} ist somit identisch der Differenz der Systemantworten ΔY_i :

$$\Pi_i^{\text{ED}} = \Delta Y_i \quad (3.5)$$

Dazu wird im Vorfeld der Berechnung der Wert der Ausgangsgröße angegeben, der als Differenz zwischen den Antworten des zu validierenden Modells und des Referenzmodells nicht überschritten werden darf. Innerhalb einer Frequenzgruppe wird ein vereinfachtes Modell als erfolgreich validiert betrachtet, wenn die vorgegebene Differenz der Systemantworten für keinen der Testpunkte überschritten wird. Dieses Vorgehen ist einerseits pragmatisch, einige Eigenschaften sind andererseits herausfordernd. Das Verfahren wird für alle Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe angewendet. Die Definition der Frequenzgruppen orientiert sich an der Lage der Maxima und Minima der Systemantwort der betrachteten Modelle. Gerade im Bereich der Resonanzstellen, also den Maxima einer Systemantwort, ist der Wert der Systemantwort groß. Im Bereich der Minima ist der Wert der Systemantwort klein. Gerade in der Akustik ist der Wertebereich der Systemantworten sehr groß und kann einige Zehnerpotenzen umfassen. Um im Bereich der Resonanzen ein sinnvolles Validierungskriterium zu definieren ist somit eine große, tolerierte Differenz erforderlich. Dies kann dazu führen, dass die vereinfachten Modelle sehr häufig verwendet werden. Dies resultiert in einer geringen Qualität der Approximation der Systemantwort. Demgegenüber führt eine kleine tolerierte Differenz zu einer hohen Qualität der Approximation der Systemantwort. Allerdings reduziert dies die erreichbare Rechenzeitersparnis durch den eingeschränkten Einsatz der vereinfachten Modelle.

Die Herausforderungen der Verwendung eines absoluten tolerierten Fehlers für die einfache Differenz werden mittels des Validierungskriteriums der *relativen Differenz* Π^{RD} umgangen. Dabei wird die Differenz der Systemantworten ΔY_i nicht absolut, sondern bezogen auf den Wert der Systemantwort des Referenzmodells verwendet, siehe Gleichung (3.6). Auch für dieses Validierungskriterium wird das vereinfachte, zu validierende Modell nur als erfolgreich validiert betrachtet, wenn die relative Differenz der Systemantworten den vorgegebenen Wert innerhalb einer Frequenzgruppe für keinen der Testpunkte überschreitet.

$$\Pi_i^{\text{RD}} = \frac{\Delta Y_i}{Y_i^{\text{Ref}}} \quad (3.6)$$

Die in der Akustik häufige Verwendung von Pegelgrößen legt die Angabe des Validierungskriteriums als *einfache Pegeldifferenz* nahe. Dazu wird, entsprechend Gleichung (3.7), die Pegeldifferenz der Ausgangsgrößen des vereinfachten Modells und des Referenzmodells gebildet. Der Parameter ϵ wird abhängig von der Art der Ausgangsgröße der Modelle gewählt. Dabei ist $\epsilon = 1$ für Energiegrößen wie beispielsweise die abgestrahlte Schallleistung. Für Feldgrößen, wie beispielsweise der Schalldruck, ist $\epsilon = 2$. Der Vorteil der Angabe der einfachen Pegeldifferenz gegenüber der relativen Differenz ist die für akustische Anwendungen einfache Interpretierbarkeit.

$$\Pi_i^{\text{EPD}} = \left| 10 \lg \left(Y_i^{\text{VM}} \right)^\epsilon - 10 \lg \left(Y_i^{\text{Ref}} \right)^\epsilon \right| \text{ dB} = \left| 10 \lg \left(\frac{Y_i^{\text{VM}}}{Y_i^{\text{Ref}}} \right)^\epsilon \right| \text{ dB} \quad (3.7)$$

Die einfache Pegeldifferenz als Validierungskriterium wird, analog zu den bisher genannten Validierungskriterien, für jeden Testpunkt ausgewertet. Das zu validierende Modell wird nur dann als erfolgreich validiert betrachtet, wenn das Validierungskriterium für alle Testpunkte erfüllt wird. Demgegenüber wird für das Validierungskriterium der *mittleren Pegeldifferenz* die Pegeldifferenz aus Gleichung (3.7) über alle Testpunkte energetisch gemittelt, vgl. Gleichung (3.8). Darin ist n_t die Anzahl der Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe. Somit ist der vorgegebene, tolerierte Fehler nur im Mittel über alle Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe einzuhalten. Dadurch wird vermieden, dass ein einzelner nicht gültiger Testpunkt direkt zu einer nicht erfolgreichen Validierung des Modells in der Frequenzgruppe führt.

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{MPD}} &= 10 \lg \left(\frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} 10^{\frac{\Delta L_i}{10 \text{ dB}}} \right) \text{ dB} \\ \text{mit} \\ \Delta L_i &= \left| 10 \lg \left(\frac{Y_i^{\text{VM}}}{Y_i^{\text{Ref}}} \right)^\epsilon \right| \text{ dB} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die bisher vorgestellten Validierungskriterien gehen von einem deterministischen Berechnungsergebnis aus. Die Ausgangsgröße hängt somit eindeutig von den Eingangsgrößen ab. Dies ist, mit Ausnahme der Unsicherheitsquantifizierung, für numerische Berechnungen mittels der FEM gegeben. Allerdings wird das vorgestellte Verfahren für die Nutzung vereinfachter Modelle konstruiert. Diese vereinfachten Modelle sind, im Vergleich zu dem Referenzmodell, hinsichtlich ihres Abbildungs- und Verkürzungsmerkmals sowie ihres pragmatischen Merkmals eingeschränkt, vgl. Abschnitt 1.1. Gleichzeitig ist auch das (numerische) Referenzmodell ein Modell, es bietet somit nur ein eingeschränktes Abbild des Realitätsmodells. Diese Einschränkungen der Modelle führen zu einer Modellunsicherheit, vgl. Abschnitt 2.3. Aufgrund dieser Unsicherheit ist eine Validierung anhand des Berechnungsergebnisses des Referenzmodells nicht notwendigerweise zielführend. In [26] wird gezeigt, dass gerade die Validierung bei Systemantworten mit hoher Dynamik herausfordernd ist. Dies ist ein typischer Fall für Anwendungen in der Akustik. Für Systeme mit geringer Dämpfung führen bereits geringe Abweichungen der Resonanzfrequenzen der beteiligten Modelle in der Nähe der Resonanzstellen zu deutlich verschiedenen Berechnungsergebnissen. Dennoch kann durch das zu validierende Modell beispielsweise die Schwingform und die Amplitude mit hoher Genauigkeit abgebildet werden. Somit kann allein aus der Abweichung der Amplitude der Systemantwort nicht notwendigerweise gefolgert werden, dass das zu validierende Modell insgesamt keine ausreichende Ergebnisqualität bietet. Ein Ansatz um diesen Effekt zu umgehen, besteht in der Betrachtung der Ausgangsgrößen beider Modelle als Zufallsvariablen. Dadurch wird die Ergebnisgröße beider Modelle unsicher. Das deterministische Berechnungsergebnis wird als eine mögliche Realisierung der Zufallsvariablen betrachtet. Der Vergleich der Systemantwort basiert dann nicht auf der Differenz zweier einzelner Zahlenwerte, sondern wird als Abstand zweier Vertrauensbereiche ausgedrückt. Das Ziel ist hier nicht die Modellierung einer physikalisch oder mathematisch motivierten Unsicherheit. Vielmehr besteht das Ziel darin, ein *weiches Kriterium* zum Vergleich der Systemantworten zu schaffen. Dieses Vorgehen entspricht eher dem ingenieurmäßigen Ansatz, den Verlauf der Systemantwort qualitativ zu beurteilen. Jeder Ausgangsgröße der betrachteten Modelle wird in diesem Fall eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zugeordnet. Der Einfachheit halber wird eine Normalverteilung verwendet, andere Verteilungen sind prinzipiell ebenso möglich. Als Validierungskriterium wird die Überlappung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen verwendet. Dazu bietet der *Bhattacharyya-Koeffizient* eine Metrik. Der Bhattacharyya-Koeffizient misst die Überlappung zweier Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit einem Wertebereich von 0 (keine Überlappung) bis 1 (Identität). Für die genaue Berechnungsvorschrift des Bhattacharyya-Koeffizienten sei auf [22, 40, 108] verwiesen.

In Abbildung 3.4 wird die Funktion des Bhattacharyya-Koeffizienten illustriert. Als Beispiel wird die Normalverteilung $\mathcal{N}_{1,2}(\mu_{1,2}, \sigma_{1,2})$ als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für beide Zufallsvariablen gewählt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden jeweils durch den Mittelwert $\mu_{1,2}$ und die Standardabweichung $\sigma_{1,2}$ bestimmt. Für die erste Zufallsvariable wird als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion die Standardnormalverteilung, $\mathcal{N}_1(0, 1)$, verwendet. Die zweite Wahrscheinlichkeits-

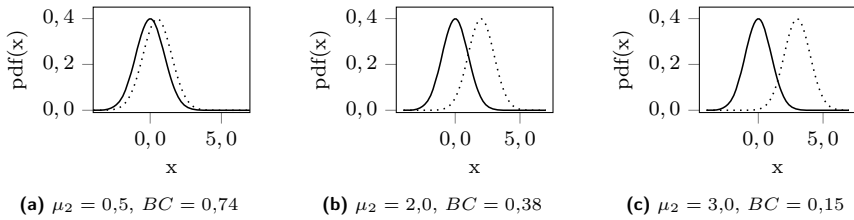


Abbildung 3.4.: Messung der Überlappung verschiedener Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (‘—’: $\mu_1 = 0,0$; ‘...’: μ_2 variiert) mit dem Bhattacharyya-Koeffizienten (BC). $BC = 1,0$: Identität, $BC = 0,0$: keine Überlappung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

dichtefunktion erhält ebenfalls die Standardabweichung $\sigma_2 = 1,0$, der Mittelwert μ_2 wird variiert. In Abbildung 3.4a wird der Mittelwert der zweiten Zufallsvariable zu $\mu_2 = 0,5$ gewählt, dargestellt sind die resultierenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Die Überlappung beider Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ist groß, der zugehörige Bhattacharyya-Koeffizient erreicht einen Wert von $BC = 0,74$. In Abbildung 3.4b sind für $\mu_2 = 2,0$ und einen Bhattacharyya-Koeffizienten von $BC = 0,38$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen dargestellt. Sinkt die Überlappung weiter, wie für $\mu_3 = 3,0$ in Abbildung 3.4c dargestellt, so nimmt auch der zugehörige Bhattacharyya-Koeffizient weiter ab, hier auf $BC = 0,15$. Mit dem Bhattacharyya-Koeffizienten als Abstandsmaß der berechneten Systemantworten wird das zugehörige Validierungskriterium definiert als:

$$\Pi_i^{BC} = BC \left(\mathcal{N} \left(Y_i^{\text{Ref}}, \sigma \right), \mathcal{N} \left(Y_i^{\text{VM}}, \sigma \right) \right) \quad . \quad (3.9)$$

Für die berechneten Systemantworten wird an jedem Testpunkt eine Normalverteilung angenommen. Der berechnete Wert der Systemantwort an dem i -ten Testpunkt wird als Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion verwendet. Die Standardabweichung σ wird vorgegeben. Damit kann die Überlappung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen berechnet werden. Für eine Überlappung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von $BC \geq 0,5$ wird das vereinfachte Modell als erfolgreich validiert eingestuft.

Verteilung der Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe

Die Frequenzgruppen werden so gewählt, dass die Anzahl der Testpunkte klein gegen die Anzahl der Frequenzstützstellen innerhalb einer Frequenzgruppe ist. Dies wird im Rahmen der Budgetplanung ausführlich diskutiert. Innerhalb einer Frequenzgruppe liegen somit mehr Frequenzstützstellen als Testpunkte. Die Festlegung der Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe erfolgt entweder *linear* oder durch *zufällige Verteilung* innerhalb der Frequenzgruppe. Für die lineare Verteilung der

Testpunkte wird Gleichung (3.10) verwendet. Dabei wird die Frequenz f_i^t des i -ten Testpunkts aus der unteren Grenze der Frequenzgruppe f_{min}^g und der oberen Grenze f_{max}^g sowie der Anzahl Testpunkte in der Frequenzgruppe n_t berechnet. Die Berechnung der Anzahl der Testpunkte wird in Abschnitt 3.5.5 vorgestellt.

$$f_i^t = \frac{f_{max}^g - f_{min}^g}{n_t + 1} \cdot i + f_{min}^g, \quad i = 1, \dots, n_t \quad (3.10)$$

Gleichung (3.10) ist so konstruiert, dass die obere und untere Grenze des Frequenzbereichs der Frequenzgruppe nicht berücksichtigt werden. Der Frequenzabstand der Testpunkte untereinander ist somit gleich dem Abstand des ersten Testpunkts zur unteren und des letzten Testpunkts zur oberen Frequenzgrenze der Frequenzgruppe. Die mittels Gleichung (3.10) berechneten Frequenzen stimmen typischerweise nicht mit vorhandenen Frequenzstützstellen überein. In diesem Fall wird die Frequenzstützstelle als Testpunkt gewählt, die der berechneten Frequenz am nächsten liegt.

Für die zufällige Verteilung der Frequenzstützstellen innerhalb einer Frequenzgruppe wird die Lage der Testpunkte f^t als gleichverteilte, diskrete Zufallsvariable modelliert, vgl. Gleichung (3.11). Die als Testpunkte zu verwendenden Frequenzstützstellen werden zufällig aus allen in der Frequenzgruppe liegenden Frequenzstützstellen gezogen, der Abstand der Frequenzstützstellen beträgt δf . Dabei sind alle Frequenzstützstellen gleich wahrscheinlich, allerdings darf keine Frequenzstützstelle mehrfach verwendet werden.

$$\mathcal{P}(f^t = f^g) = \frac{1}{n_f^g} \quad (3.11)$$

mit

$$f^g \in \{f_{min}^g, f_{min}^g + \delta f, \dots, f_{max}^g - \delta f, f_{max}^g\}$$

3.5.3. Modell-Management-Strategie und Budgetplanung

Die Modell-Management-Strategie ermittelt die Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle zur Laufzeit und setzt sie, wenn die Validierung gegenüber dem Referenzmodell erfolgreich ist, ein. Das Ziel ist es, den für die Validierung der vereinfachten Modelle zusätzlichen Berechnungsaufwand durch den Einsatz der vereinfachten Modelle mindestens zu kompensieren. Um diesen Effekt sicher stellen zu können wird die *Budgetplanung* eingeführt. Im Rahmen der Budgetplanung werden allen Modellen *Kosten* zugeordnet. Die Kosten werden in *Rechenzeit / Frequenzstützstelle* gemessen und zu Beginn der Modell-Management-Strategie ermittelt. Anhand der Kosten wird der Einsatz der zur Verfügung stehenden Modelle geplant. Ziel der Planung ist es, die vereinfachten Modelle an möglichst vielen Frequenzstützstellen zu validieren. Dabei wird die Anzahl der Validierungsprozesse so geplant, dass der

Einsatz der vereinfachten Modelle gerade den zusätzlichen Berechnungsaufwand für die Validierung kompensiert. Auf diese Weise wird der Fokus auf eine möglichst hohe Absicherung der Eignung der vereinfachten Modelle zur Approximation der Lösung des Referenzmodells gelegt. Die erreichte Rechenzeitersparnis ist für die Budgetplanung von untergeordneter Bedeutung. Dennoch zielt das Verfahren auf die Reduktion der erforderlichen Rechenzeit ab. Diese Reduktion wird dadurch erhalten, dass die Budgetplanung zunächst konservativ durchgeführt wird. Während der Laufzeit der Modell-Management-Strategie werden aufgrund der fortlaufenden Validierung neue Informationen über die Einsetzbarkeit der vereinfachten Modelle verfügbar. Dadurch werden einige bei der Budgetplanung eingeplante Schritte des Verfahrens obsolet. Das Verkürzen des Validierungsprozesses durch das Überspringen der obsoleten Schritte erzielt die eigentliche Rechenzeitersparnis. Dies wird in Abschnitt 3.5.4 vorgestellt.

Schritt 1 – Ermittlung der Kosten jedes Modells

Der erste Schritt der Modell-Management-Strategie ist die Ermittlung der Kosten jedes einzelnen Modells θ_q . Dazu werden alle zur Verfügung stehenden Modelle für die ersten n_f^{KS} Frequenzstützstellen des Frequenzbereichs gelöst, die für jedes Modell erforderliche Rechenzeit wird gemessen. Damit sind die Kosten θ_q jedes Modells bekannt. Die für diesen Prozess zu berücksichtigenden Gesamtkosten Θ^{KS} sind somit:

$$\Theta^{KS} = \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot n_f^{KS} \quad . \quad (3.12)$$

Die in Gleichung (3.12) dargestellte Schätzung der Gesamtkosten basiert auf der Annahme, dass die zur Lösung einer Frequenzstützstelle erforderliche Rechenzeit unabhängig von der Frequenz ist. Diese Annahme ist für direkte Lösungsverfahren geeignet, im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich direkte Lösungsverfahren verwendet. Es hat sich im Rahmen der Untersuchungen gezeigt, dass die Lösung eines Modells für eine einzelne Frequenzstützstelle mehr Zeit beansprucht als bei Berechnung mehrerer Frequenzstützstellen und Bildung eines Mittelwertes. Dieser Effekt wird darauf zurückgeführt, dass bei der Lösung der ersten Frequenzstützstelle zusätzliche Operationen notwendig sind, wie das Einlesen der das Modell definierenden Eingabedatei und das Reservieren des zur Speicherung der Systemmatrizen erforderlichen Speichers. Diese Operationen sind nur einmal erforderlich, die Daten stehen für die nachfolgenden Berechnungen weiter zur Verfügung. Deshalb erfordern die Berechnungen weiterer Frequenzstützstellen weniger Zeit, die Rechenzeit nimmt im Mittel ab. Es hat sich gezeigt, dass für eine Anzahl von drei berechneten Frequenzstützstelle ein guter Schätzwert für die Rechenzeit einer Frequenzstützstelle ermittelt wird. Die Berechnungsergebnisse dieses ersten Berechnungsschrittes der Modell-Management-Strategie werden gespeichert und stehen für den weiteren

Verlauf der Berechnung zur Verfügung. Die Modelle werden zum Abschluss dieses Schrittes anhand ihrer Kosten aufsteigend geordnet. Das Modell mit den geringsten Kosten erhält den Index 1, das Modell mit den höchsten Kosten erhält den Index Q . Die Modelle werden nachfolgend als *Modell 1, 2, ..., Q* benannt. Da im Vorfeld nicht bekannt ist, welche Kosten auf welches Modell entfallen, ist das Referenzmodell typischerweise, aber nicht notwendigerweise, das Modell mit den höchsten Kosten. Es erhält somit einen Index zwischen 1 und Q . Für das Referenzmodell werden die Kosten nachfolgend daher mit θ_q^{Ref} benannt. Dabei kennzeichnet der Index q weiterhin die Position des Referenzmodells innerhalb der, anhand der Kosten aufsteigend, geordneten Modelle. Der Zusatz ‘Ref’ wird verwendet, um das Referenzmodell kenntlich zu machen. Wird ein Modell verwendet, welches einen höheren Berechnungsaufwand als das Referenzmodell besitzt, so kommt dieses Modell nicht zum Einsatz. In diesem Fall führt die entwickelte Modell-Management-Strategie zur Validierung des Referenzmodells anhand des Referenzmodells selbst. Dieser Validierungsprozess ist immer erfolgreich. Somit kommt es nie zu einer Validierung eines Modells mit Kosten höher als die des Referenzmodells.

Mit den Kosten des Referenzmodells und der bekannten Anzahl Frequenzstützstellen kann weiterhin das zur Verfügung stehende *Budget* B ermittelt werden. Das Budget ist der Berechnungsaufwand, der für eine Lösung der Berechnungsaufgabe nur mittels des Referenzmodells erforderlich ist. Für die zu konstruierende Modell-Management-Strategie stellt das Budget somit eine obere Grenze dar. Mit den Kosten des Referenzmodells θ_q^{Ref} und der Anzahl aller zur Lösung erforderlichen Frequenzstützstellen n_f^{ges} ist das Budget B :

$$B = \theta_q^{\text{Ref}} \cdot n_f^{\text{ges}} \quad . \quad (3.13)$$

Schritt 2 – Aufwand zur Ermittlung der Frequenzgruppen und erste Lösung

Für die Validierung der vereinfachten Modelle wird der für die Berechnung interessierende Frequenzbereich in Frequenzgruppen unterteilt. Die Frequenzgruppen werden anhand des Verlaufs der Systemantwort definiert. Somit ist bereits zu Beginn des Verfahrens eine Systemantwort erforderlich. Im zweiten Schritt der Modell-Management-Strategie wird daher eine erste Lösung der Berechnungsaufgabe für den gesamten Frequenzbereich ermittelt. Dazu wird das Modell 1 mit den Kosten θ_1 verwendet. Die Kosten Θ^{FG} für diesen Schritt werden nach Gleichung (3.14) bestimmt:

$$\Theta^{FG} = \theta_1 \cdot n_f^{\text{ges}} \quad . \quad (3.14)$$

Es handelt sich hier eine konservative Schätzung der insgesamt anfallenden Kosten, da in der Implementierung des Verfahrens dieser Schritt iterativ durchgeführt wird. Das verwendete Modell 1 wird dabei höchstens an allen, typischerweise aber nur für einen Teil aller Frequenzstützstellen im Frequenzbereich ausgewertet. Dieser Prozess

wird in Abschnitt 3.5.4 vorgestellt. Am Ende dieses Schrittes ist die Lage der Frequenzgruppen im Frequenzbereich und die Anzahl der Frequenzgruppen n_g bekannt.

Schritt 3 – Ermittlung der Anzahl der Testpunkte je Frequenzgruppe und Lösung

Für die Validierung aller vereinfachten Modelle innerhalb der, in Schritt 2 definierten, Frequenzgruppen werden Testpunkte innerhalb der Frequenzgruppen festgelegt. In Abschnitt 3.5.2 werden die Validierungskriterien und die Verteilung der Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe vorgestellt. Dabei wird die Anzahl der Testpunkte je Frequenzgruppe n_t zunächst als bekannt angenommen. Das Ziel des Verfahrens ist es, durch die Verwendung vereinfachter Modelle einen Rechenzeitvorteil gegenüber der direkten Lösung des Referenzmodells zu erzielen. Um dieses Ziel zu erreichen ist die geeignete Wahl der Anzahl der Testpunkte wesentlich.

Um die Anzahl der Testpunkte ermitteln zu können, werden zunächst die Kosten zur Validierung aller Modelle Θ^{Val} ermittelt. Für ein Modell werden die Kosten für die Validierung durch die Auswertung des Modells an allen Testpunkten innerhalb einer Frequenzgruppe und der Anzahl der Frequenzgruppen insgesamt bestimmt. Die Kosten für alle Validierungen ergeben sich durch Summation über alle Modelle. Gleichung (3.15) zeigt den Zusammenhang:

$$\Theta^{Val} = \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot n_g \cdot n_t \quad . \quad (3.15)$$

Über den Zusammenhang in Gleichung (3.15) hinaus werden zusätzlich in Abschnitt 3.5.4 Abbruchkriterien definiert, welche durch die Kostenschätzung nicht berücksichtigt werden. Daher ist die Kostenschätzung in Gleichung (3.15) ebenfalls konservativ. Das erste Abbruchkriterium bezieht sich auf die Anzahl der vereinfachten Modelle, die in jeder Frequenzgruppe überprüft werden. Dabei wird der Validierungsprozess für eine Frequenzgruppe abgebrochen, wenn ein Modell erfolgreich validiert wird. Das zweite Abbruchkriterium bezieht sich auf die Anzahl der Frequenzgruppen, für die die vereinfachten Modelle getestet werden. Wird ein zu validierendes Modell mehrfach nicht erfolgreich validiert, so wird der Validierungsprozess ebenfalls beendet. Die Abbruchkriterien werden in Abschnitt 3.5.4 genauer erläutert.

Um die Kompensation des zusätzlichen Berechnungsaufwands aufgrund der erforderlichen Berechnungen für den Validierungsprozess zu ermöglichen, darf die Summe aller Kosten maximal dem zur Verfügung stehenden Budget entsprechen. Neben den bereits erläuterten Kosten für die Ermittlung der Kosten aller Modelle Θ^{KS} , den Kosten für die Ermittlung der Frequenzgruppen Θ^{FG} und den Kosten für die Validierungen Θ^{Val} fallen die Kosten für die Berechnung der Lösung unter Verwendung

der zur Verfügung stehenden Modelle Θ^L an. Damit ergibt sich die Forderung zur Kompensation des Validierungsaufwandes entsprechend Gleichung (3.16).

$$\underbrace{\theta_q^{\text{Ref}} \cdot n_f^{\text{ges}}}_B \geq \underbrace{\sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot n_f^{KS}}_{=\Theta^{KS}} + \underbrace{\theta_1 \cdot n_f^{\text{ges}}}_{=\Theta^{FG}} + \underbrace{\sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot n_q \cdot n_t}_{=\Theta^{Val}} + \Theta^L \quad (3.16)$$

Gleichung (3.16) enthält in der angegebenen Form zwei Unbekannte, die Anzahl der Testpunkte je Frequenzgruppe n_t sowie die Kosten zur Lösung mit allen zur Verfügung stehenden Modellen Θ^L . Der Aufwand zur Lösung kann nicht direkt berechnet werden, da die tatsächlich anfallenden Kosten vom Umfang des Einsatzes der vereinfachten Modelle abhängen. Die Kosten Θ^L können mittels der Anteile der vereinfachten Modelle Φ_q an der Gesamtlösung formuliert werden:

$$\Theta^L = \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot \Phi_q \cdot n_f^{\text{ges}} \quad (3.17)$$

Die Größe Φ_q bezeichnet das Verhältnis aus der Anzahl von Frequenzstützstellen, an denen das q -te Modell eingesetzt wird n_f^q , und der Anzahl Frequenzstützstellen im Frequenzbereich insgesamt n_f^{ges} :

$$\Phi_q = \frac{n_f^q}{n_f^{\text{ges}}} \quad (3.18)$$

Für die Größe Θ^L wird eine konservative Schätzung der Kosten verwendet. Gleichung (3.17) berücksichtigt die Kosten aller Modelle, gewichtet nach ihren Anteilen an der Gesamtlösung. Nicht berücksichtigt wird, dass während des zweiten Schritts der Modell-Management-Strategie zur Bestimmung der Frequenzgruppen bereits eine Lösung anhand des Modells mit den geringsten Kosten ermittelt wird, siehe Gleichung (3.14). Der Grund dafür ist die in Abschnitt 3.5.4 vorgestellte, iterative Ermittlung dieser ersten Lösung. Der verwendete Prozess bestimmt die Systemantwort iterativ mit einer zunehmend feinen Frequenzauflösung. Die dazu erforderliche Anzahl Berechnungen hängt maßgeblich von der unbekannten Modendichte ab und kann nicht im Vorfeld prognostiziert werden. Daher wird hier eine vollständige Berechnung mit dem günstigsten Modell für den zugehörigen Anteil an der Gesamtlösung berücksichtigt. Weiterhin werden während des erstens Schrittes der Modell-Management-Strategie zur Ermittlung der Kosten alle zur Verfügung stehenden Modelle an einigen Frequenzstützstellen ausgewertet. Diese Ergebnisse werden gespeichert und wiederverwendet. Diese Aufwände fallen somit bei der Bestimmung der Gesamtlösung nicht erneut an.

Die in Gleichung (3.18) formal definierte Größe Φ_q kann vor Beginn der Berechnung nicht bestimmt werden, da die Anteile der vereinfachten Modelle an der Gesamtlösung nicht bekannt sind. Um dennoch eine Schätzung der Kosten und damit die Auswertung von Gleichung (3.16) zu ermöglichen wird die Größe Φ_q geschätzt. Als Ansatz für die Schätzung werden die Kosten des q -ten Modells auf die Summe der Kosten aller Modelle bezogen. Die Größe Φ_q ergibt sich somit zu:

$$\Phi_q = \frac{\theta_q}{\sum_{i=1}^Q \theta_i} \quad . \quad (3.19)$$

Die Größe Φ_q kann mit Gleichung (3.19) nach der Ermittlung der Kosten aller Modelle ausgewertet werden. Damit wird Gleichung (3.16) lösbar und kann nach der Anzahl der Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe gelöst werden. Für ein mittels der FEM zu lösendes mathematisches Modell hängt die erforderliche Rechenzeit mindestens linear von der Anzahl der FHG ab. Demgegenüber ist die Einsetzbarkeit eines Modells im Frequenzbereich von physikalischen Eigenschaften wie der relevanten Wellenlänge, der Wellenart, den Randbedingungen und Lasten abhängig. Daher kann die Auswertung der Gleichung (3.19) zu sehr kleinen Werten für Φ_q führen. Ein ähnlicher Fall kann eintreten, wenn statt der FEM ein anderer Ansatz zur Überführung des mathematischen in das numerische Modell verwendet wird. Gerade die Nutzung analytischer Formulierungen, wie beispielsweise analytische Näherungslösungen oder polynombasierte Metamodelle, führt zu sehr kleinen Werten der Rechenzeit für die Modellauswertung. Dadurch wird die Nutzung eines vereinfachten Modells unrealistisch unterschätzt. Der Wertebereich von Φ_q wird daher auf $\Phi_q \geq 0,1$ begrenzt. Jedes zur Verfügung stehende Modell wird somit für wenigstens 10 % aller Frequenzstützstellen berücksichtigt. Gleichung (3.19) wird angepasst zu:

$$\Phi_q = \max \left[0,1 ; \frac{\theta_q}{\sum_{i=1}^Q \theta_i} \right] \quad . \quad (3.20)$$

Als Wichtungsfaktor, anhand dessen der jeweilige Anteil aller Modelle im Frequenzbereich quantifiziert wird, sollte $\sum_q \Phi_q = 1$ sein. Andernfalls werden die Kosten zur Lösung mit allen zur Verfügung stehenden Modellen in Gleichung (3.16) gegenüber den tatsächlich anfallenden Kosten überschätzt. Diese Forderung kann durch die künstlich eingeführte Begrenzung in Gleichung (3.20) verletzt werden. Um diesem Umstand zu begegnen wird für die Schätzung die Differenz von dem Modell mit den größten Kosten abgezogen:

$$\Phi_{q=Q} = 1 - \sum_{q=1}^{Q-1} \Phi_q \quad . \quad (3.21)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3.19)-(3.21) kann die Anzahl möglicher Testpunkte n_t in jeder Frequenzgruppe ermittelt werden. Dazu wird Gleichung (3.17) in die Ungleichung (3.16) eingesetzt. Dies führt auf die Ungleichungen (3.22)-(3.23). Um die Ungleichung erfüllen zu können, wird die Anzahl der Testpunkte derart gewählt, dass das Multi-Modell-Verfahren weniger Rechenzeit benötigt als die direkte Lösung mit dem Referenzmodell. Dazu wird die Ungleichung (3.23) zunächst nach der Größe n_t gelöst. Das Ergebnis für n_t ist typischerweise eine positive Dezimalzahl. Für die Anzahl der Testpunkte kommen nur ganze Zahlen in Frage. Dies wird durch den Abrunde-Operator $\lfloor \dots \rfloor$ in Gleichung (3.24) sichergestellt. Somit wird die Anzahl der Testpunkte ganzzahlig so gewählt, dass die Ungleichung (3.16) gerade eingehalten wird.

$$\theta_q^{\text{Ref}} \cdot n_f^{\text{ges}} \geq \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot n_f^{KS} + \theta_1 \cdot n_f^{\text{ges}} + \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot n_g \cdot n_t + \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot \Phi_q \cdot n_f^{\text{ges}} \quad (3.22)$$

$$0 \geq \left[n_f^{KS} + n_g \cdot n_t \right] \cdot \sum_{q=1}^Q \theta_q + n_f^{\text{ges}} \cdot \left(\theta_1 - \theta_q^{\text{Ref}} + \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot \Phi_q \right) \quad (3.23)$$

$$n_t = \left\lfloor - \frac{n_f^{\text{ges}} \cdot \left(\theta_1 - \theta_q^{\text{Ref}} + \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot \Phi_q \right) + n_f^{KS} \cdot \sum_{q=1}^Q \theta_q}{n_g \cdot \sum_{q=1}^Q \theta_q} \right\rfloor \quad (3.24)$$

Die anhand Gleichung (3.24) ermittelte Anzahl Testpunkte innerhalb einer Frequenzgruppe basiert auf der Bilanzierung der Kosten für die Berechnung und des zur Verfügung stehenden Budgets. Dazu werden die Anteile der zu Verfügung stehenden Modelle an der Gesamtlösung geschätzt. In der Anwendung der Modell-Management-Strategie werden die tatsächlich realisierten Anteile der zur Verfügung stehenden Modelle Φ_q erst zur Laufzeit ermittelt. Die ermittelten Anteile weichen von den, zu Beginn des Verfahrens auf Basis der Kosten der Modelle, geschätzten Anteilen ab. Wenn der Anteil der vereinfachten Modelle aufgrund des Validierungsprozesses kleiner ist als im Vorfeld geschätzt, kann dies zu einer Vergrößerung der Rechenzeit führen. Dies wird nachfolgend in einem Beispiel demonstriert. In Tabelle 3.2 sind Beispielwerte für die Anwendung der Modell-Management-Strategie mit einem Referenzmodell und zwei vereinfachten Modellen angegeben. Die Lösung ist in einem Frequenzbereich mit $n_f^{\text{ges}} = 1000$ Frequenzstützstellen zu ermitteln. Die Auswertung des Modells mit den geringsten Kosten hat $n_g = 10$ Frequenzgruppen ermittelt. Das Referenzmodell besitzt hier, wie in den meisten Anwendungsfällen, die höchsten Kosten. Die Kosten werden daher mit dem Zusatz 'Ref' versehen. Die weiteren Daten sind in Tabelle 3.2 angegeben.

Mit den in Tabelle 3.2 angegebenen Werten für die Kosten der zur Verfügung stehenden Modelle führt Gleichung (3.19) auf die geschätzten Anteile der Modelle

Tabelle 3.2.: Testfall zum Einfluss der geschätzten Anteile der Modelle auf die Ersparnis

Größe	Wert	Einheit
n_g	10	-
n_f^{ges}	1000	-
θ_1	1	$\frac{\text{Sekunden}}{\text{Frequenzstützstelle}}$
θ_2	4	$\frac{\text{Sekunden}}{\text{Frequenzstützstelle}}$
θ_3^{Ref}	8	$\frac{\text{Sekunden}}{\text{Frequenzstützstelle}}$
n_f^{KS}	3	-

$\Phi_1 = 0,07$, $\Phi_2 = 0,36$, $\Phi_3 = 0,57$. Die Anwendung der Korrekturen in Gleichung (3.20) und (3.21) führt auf die zur Auswertung von Gleichung (3.24) verwendeten Werte $\Phi_1 = 0,1$, $\Phi_2 = 0,36$, $\Phi_3 = 0,54$. Mit den weiteren angegebenen Werten führt die Auswertung von Gleichung (3.24) auf die Anzahl der Testpunkte in jeder Frequenzgruppe $n_t = 5$.

Die Ungleichung (3.23) lässt sich durch Einführung der Rechenzeiterparnis χ in eine Gleichung überführen, siehe Gleichungen (3.25)-(3.26). Darin bezeichnet χ die Differenz der Rechenzeiten zwischen der direkten Lösung mit dem Referenzmodell und der Verwendung der Modell-Management-Strategie.

$$0 = \left[n_f^{KS} + n_g \cdot n_t \right] \cdot \sum_{q=1}^Q \theta_q + n_f^{\text{ges}} \cdot \left(\theta_1 - \theta_q^{\text{Ref}} + \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot \Phi_q \right) + \chi \quad (3.25)$$

$$\chi = -1 \cdot \left[\left[n_f^{KS} + n_g \cdot n_t \right] \cdot \sum_{q=1}^Q \theta_q + n_f^{\text{ges}} \cdot \left(\theta_1 - \theta_q^{\text{Ref}} + \sum_{q=1}^Q \theta_q \cdot \Phi_q \right) \right] \quad (3.26)$$

Um den Einfluss der zur Laufzeit ermittelten, tatsächlichen Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle zu demonstrieren, wird die Rechenzeiterparnis χ in Abbildung 3.5 über den Anteilen Φ_1 , Φ_2 der vereinfachten Modelle an der Gesamtlösung aufgetragen. Der Anteil des Referenzmodells Φ_3 ergibt sich nach Gleichung (3.21). Das in dem Diagramm eingetragene 'x' markiert die Anteile Φ_1 , Φ_2 aus Tabelle 3.2. Aufgrund der Konstruktion der Modell-Management-Strategie liegt das 'x' nahe an der Nulllinie. Dabei sorgt der Abrunde-Operator in Gleichung (3.24) dafür, dass eine positive Ersparnis erreicht wird.

Anhand Abbildung 3.5 wird deutlich, dass die tatsächlich während des Ablaufs der Modell-Management-Strategie ermittelten Anteile der vereinfachten Modelle an der Gesamtlösung mindestens der Schätzung entsprechend müssen, um eine Rechenzeiterparnis zu generieren. Entsprechend den Linien gleicher Ersparnis können sich dabei variierende Anteile der vereinfachten Modelle gegenseitig kompensieren. Dennoch ist die erreichbare Ersparnis eher gering, wenn die Anteile der vereinfachten

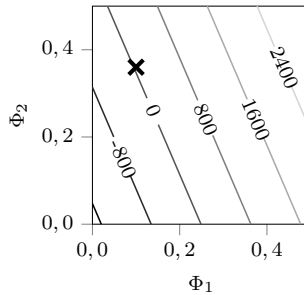
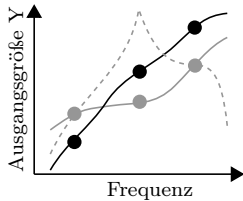


Abbildung 3.5.: Variation der zu Beginn der Berechnung geschätzten Φ_q und resultierende Ersparnis χ . Das 'x' markiert die anhand Tabelle 3.2 geschätzten Anteile Φ_1 und Φ_2

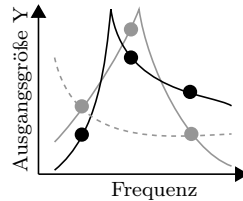
Modelle nicht deutlich größer sind als aufgrund ihrer Kosten geschätzt wird. Die tatsächliche Rechenzeiterparnis wird vor allem durch Nutzung der in Abschnitt 3.5.4 eingeführten Abbruchkriterien erreicht. Abbruchkriterien begrenzen den Berechnungsaufwand für die Ermittlung der Frequenzgruppen und die Validierung der vereinfachten Modelle. Diese Reduktionen werden in den Gleichungen (3.12)-(3.24) nicht berücksichtigt. So wird sichergestellt, dass die Modell-Management-Strategie, selbst wenn keine Abbruchkriterien verwendet werden, eine ähnliche Rechenzeit erfordert wie die direkte Lösung des Referenzmodells.

Das in Tabelle 3.2 beschriebene Beispiel führt bei Auswertung von Gleichung (3.24) auf einen positiven Wert für die Anzahl der Testpunkte n_t . Dies ist nicht immer gegeben. Die Anzahl der Testpunkte kann, abhängig von den Kosten der einzelnen Modelle und der Anzahl der Frequenzgruppen, beliebige Werte annehmen. Für diese Fälle werden Ausnahmen vorgesehen. Als Mindestanzahl der Testpunkte in einer Frequenzgruppe wird $n_t \geq 3$ festgelegt. Weniger als drei Testpunkte erscheinen nicht sinnvoll, da die Testpunkte dazu dienen, den Verlauf der Systemantwort über der Frequenz zu charakterisieren. Die Idee ist in Abbildung 3.6 illustriert. Frequenzgruppen können zwischen einem Maximum und einem Minimum oder zwischen zwei Minima der Systemantwort definiert werden, vgl. Abschnitt 3.5.1. In Abbildung 3.6a ist der Fall einer Frequenzgruppe zwischen einem Maximum und einem Minimum der Systemantwort schematisch dargestellt. In dem Frequenzbereich zwischen den Grenzen der Frequenzgruppe steigt die Systemantwort monoton an. Die Systemantwort des Referenzmodells ist in schwarz, die Antwort des zu validierenden Modells ist in grau dargestellt. Dabei ist die durchgezogene Linie die tatsächliche Systemantwort. Die gestrichelte Linie zeigt einen fiktiven Verlauf der Systemantwort des zu validierenden Modells. Werden nur die in Abbildung 3.6a äußeren Testpunkte zur Validierung der Modelle verwendet, so wird ein zwischen den Testpunkten liegendes Maximum (oder Minimum) nicht erkannt. Die Validierung führt zu einem positiven Ergebnis, obwohl die Verläufe der Systemantwort deutlich verschieden sind. Dieser Fall wird durch Hinzunahme des dritten Testpunkts vermieden. Ein ähnlicher Fall

ist in Abbildung 3.6b dargestellt. Hier wird der Fall einer Frequenzgruppe zwischen zwei Minima der Systemantwort betrachtet. Auch hier ist die Verwendung nur der zwei äußeren Testpunkte irreführend. Demgegenüber lässt die Verwendung eines dritten Testpunktes in der Mitte den Verlauf der Systemantwort mit dem zwischen den Testpunkten vorliegendem Maximum deutlich erkennen.



(a) Wahl der Frequenzgruppe zwischen Maximum und Minimum



(b) Wahl der Frequenzgruppe zwischen zwei Minima

Abbildung 3.6.: Verwendung von mindestens drei Testpunkten je Frequenzgruppe zur Vermeidung von Informationsverlust. Systemantwort des Referenzmodells: schwarz; mögliche Systemantworten des zu validierenden Modells: grau. Erfolgreich validierte Systemantwort bei drei Testpunkten: ('-'), erfolgreich validierte Systemantwort für zwei Testpunkte: ('--').

Wie bereits erwähnt, kann die anhand Gleichung (3.24) ermittelte Anzahl der Testpunkte je Frequenzgruppe auch geringer als $n_t = 3$ sein. Dieser Fall tritt ein, wenn die Kosten des Referenzmodells θ_q^{Ref} nicht deutlich größer als die Kosten der vereinfachten Modelle sind. Weiterhin ist die Anzahl der möglichen Testpunkte umgekehrt proportional zu der Anzahl Frequenzgruppen. Somit nimmt die Anzahl möglicher Testpunkte mit der Anzahl Frequenzgruppen ab. Für Systeme mit großer modaler Dichte können somit die, auf Basis der Lage der Maxima und Minima festgelegten, Frequenzgruppen nicht verwendet werden. Aufgrund der beschriebenen Forderung für $n_t \geq 3$ wird in diesem Fall die Gleichung (3.24) nach der Anzahl Frequenzgruppen n_g aufgelöst und mit $n_t = 3$ die mögliche Anzahl der Frequenzgruppen bestimmt. Dadurch wird sichergestellt, dass eine Rechenzeiterparnis mit den zur Verfügung stehenden vereinfachten Modellen möglich ist. Die so ermittelte Anzahl Frequenzgruppen wird gleichmäßig im Frequenzbereich verteilt und diese neuen Frequenzgruppen werden für das weitere Verfahren verwendet. Dennoch basiert auch in diesem Fall die Berechnung der möglichen Frequenzgruppen weiterhin auf den, anhand der Kosten der Modelle geschätzten, Anteilen der zur Verfügung stehenden Modelle im Frequenzbereich. Wie bereits gezeigt kann eine Abweichung von diesen geschätzten Anteilen auch für dieses Vorgehen zu einer deutlich negativen oder positiven Ersparnis führen.

Für sehr geringe Unterschiede der Kosten der zur Verfügung stehenden vereinfachten Modelle und des Referenzmodells wird auch für den Fall der Ermittlung der möglichen Frequenzgruppen kein sinnvolles Ergebnis erreicht. In diesem Fall führt

die Auswertung von Gleichung (3.24) für $n_t = 3$ auf eine Anzahl möglicher Frequenzgruppen $n_g < 1$. Für eine Frequenzgruppe wird genau eines der zur Verfügung stehenden Modelle im gesamten, zu berechnenden Frequenzbereich eingesetzt. Somit werden die vereinfachten Modelle an drei Testpunkten im gesamten Frequenzbereich validiert. Einer derartigen Validierung wird, aufgrund der sehr geringen Anzahl Testpunkte, nicht vertraut. Um dennoch die Anzahl der Testpunkte zu erhöhen wird in diesem Fall die Anzahl der Frequenzgruppen willkürlich doppelt so hoch wie die Anzahl der zur Verfügung stehenden Modelle festgelegt. Jedes der zur Verfügung stehenden Modelle kann somit in zwei Frequenzgruppen eingesetzt werden. Damit wird zunächst, basierend auf den Gleichungen (3.24) und (3.26) eine negative Rechenzeiterparnis in Kauf genommen. Aufgrund der geschätzten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle im Frequenzbereich und durch Nutzung von Abbruchkriterien des Validierungsprozesses ist dennoch eine positive Rechenzeiterparnis möglich.

3.5.4. Verfahren zur Verkürzung des Validierungsprozesses

Die Modell-Management-Strategie ist in der bisher vorgestellten Form so konstruiert, dass die Anzahl der Testpunkte maximiert wird. Die Maximierung der Anzahl der Testpunkte und die daraus resultierende Maximierung der Validierungsprozesse ermöglicht es, möglichst viele Informationen über die vereinfachten Modelle zu erhalten. Dadurch wird eine möglichst große Sicherheit des Prozesses angestrebt. Um dennoch einen Rechenzeitvorteil bei der Nutzung der Modell-Management-Strategie zu ermöglichen, werden einige der vorgestellten Verfahren durch Abbruchkriterien oder iterative Ansätze so gestaltet, dass der erforderliche Berechnungsaufwand möglichst gering wird. Die Vorstellung dieser Ansätze ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

Abbruch durch Validierung eines Modells

Der Validierungsprozess wird für jede Frequenzgruppe und jedes vereinfachte Modell separat durchgeführt. Zuerst wird das Referenzmodell für alle Testpunkte ausgewertet. Dies erfolgt je Frequenzgruppe einmal. Die Ergebnisse dieser Berechnung werden für alle Validierungen verwendet. Die Validierung der vereinfachten Modelle erfolgt für alle Modelle, bezogen auf die Kosten der einzelnen Modelle, in aufsteigender Reihenfolge. Das zu validierende vereinfachte Modell wird ausgewertet und die Ergebnisse mit den Ergebnissen des Referenzmodells unter Verwendung eines Validierungskriteriums verglichen. Wird das zu validierende Modell erfolgreich validiert, so wird der Prozess abgebrochen. Andernfalls wiederholt sich das Verfahren mit dem Modell mit den nächsthöheren Kosten, bis alle vereinfachten Modelle überprüft worden sind. Die Kostenschätzung in Gleichung (3.15) berücksichtigt die Auswertung aller vereinfachten Modelle an allen Testpunkten in jeder Frequenzgruppe und ist somit konservativ.

Abbruch aufgrund nicht erfolgreicher Validierung in anderen Frequenzgruppen

Neben dem Abbruch durch Validierung eines vereinfachten Modells bezieht sich das zweite Abbruchkriterium auf die Anzahl der Frequenzgruppen in denen ein Modell validiert wird. Die Idee der zu entwickelnden Modell-Management-Strategie in Abschnitt 3.1 basiert auf der Nutzung verschiedener Diskretisierungen für ein mathematisches Modell. In derartigen Fällen sind vereinfachte Modelle mit größeren Diskretisierungen als das Referenzmodell vor allem tieffrequent einsetzbar. Dies führt dazu, dass die Einsetzbarkeit der vereinfachten Modelle bei höheren Frequenzen zunehmend unwahrscheinlich wird. Ein ähnliches Verhalten wird auch für Modelle erwartet, deren Vereinfachung durch Nutzung eines vereinfachten mathematischen Modells erzielt wird. Das Ziel dieses Abbruchkriteriums ist es daher, vereinfachte Modelle nicht zu überprüfen, wenn der Validierungsprozess bereits in niedrigeren Frequenzbereichen nicht erfolgreich war. Demgegenüber ist es möglich, dass das Referenzmodell, aufgrund der höherwertigen Modellierung, in einzelnen Frequenzbereichen bestimmte Eigenschaften der Systemantwort abbilden kann, welche durch das vereinfachte Modell nicht berücksichtigt werden. Dies kann dazu führen, dass ein vereinfachtes Modell in einer Frequenzgruppe nicht erfolgreich validiert wird. Dagegen kann in den Frequenzgruppen oberhalb und unterhalb jedoch ein Validierungsprozess erfolgreich sein. Es ist somit nicht ausreichend, nach einem nicht erfolgreichen Validierungsprozess das zu überprüfende Modell von allen weiteren Validierungen auszuschließen. Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, wird ein zufallsbasiertes Verfahren gewählt. Dazu wird das Verhältnis γ eingeführt. Entsprechend Gleichung (3.27) wird die Größe γ aus der Anzahl Frequenzgruppen, in der das zu überprüfende Modell als nicht erfolgreich validiert eingestuft wird, n_g^- , und der Anzahl aller Frequenzgruppen n_g gebildet.

$$\gamma = \frac{n_g^-}{n_g} \quad (3.27)$$

Dazu wird während des Ablaufs der Modell-Management-Strategie die Anzahl n_g^- gezählt und der Wert von γ bestimmt. Die Anzahl der Frequenzgruppen, in denen das vereinfachte Modell noch nicht validiert wurde, wird für die Bestimmung von γ nicht gezählt. Damit ist zu Beginn des Verfahrens für jedes vereinfachte Modell $\gamma = 0$. Für das Verhältnis $\gamma > 0,5$ wird das vereinfachte Modell direkt von dem weiteren Validierungsprozess ausgeschlossen.

Weiterhin wird angenommen, dass die Einsetzbarkeit der vereinfachten Modelle mit steigender Frequenz zunehmend unwahrscheinlich wird. Somit wird auch die Entscheidung, ob das vereinfachte Modell in einer weiteren Frequenzgruppe validiert wird, mit zunehmender Anzahl nicht erfolgreicher Validierungsprozesse unwahrscheinlicher. Daher wird auch für $\gamma \leq 0,5$ ein Entscheidungskriterium eingeführt, ob das Modell in einer weiteren Frequenzgruppe validiert wird. Dazu wird die Entscheidungsvariable ξ eingeführt. Die Variable ξ ist eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten $\xi \in \{\text{ja}, \text{nein}\}$. Für ' $\xi = \text{ja}$ ' wird das vereinfachte Modell in der

nächsten Frequenzgruppe validiert. Entsprechend findet keine Validierung bei dem Wert ‘ $\xi = \text{nein}$ ’ statt. Die Wahrscheinlichkeit, ob das zu untersuchende vereinfachte Modell in der nächsten Frequenzgruppe validiert wird, ist in Gleichung (3.28) zusammengefasst:

$$\mathcal{P}(\xi = \text{ja}) = \begin{cases} 1 - \gamma & , \text{ wenn } \gamma \leq 0,5 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.28)$$

und

$$\mathcal{P}(\xi = \text{nein}) = 1 - \mathcal{P}(\xi = \text{ja})$$

Iterative Ermittlung der Frequenzgruppen

In Schritt 2 der Modell-Management-Strategie werden die Frequenzgruppen bestimmt, für die jeweils die vereinfachten Modelle validiert werden. Die Grenzen der Frequenzgruppen werden anhand der Maxima und Minima der Systemantwort ermittelt, siehe Abschnitt 3.5.1. Die Lage der Maxima und Minima im Frequenzbereich ist durch das zu lösende, numerische Modell vorgegeben. Die Wahl der Frequenzstützstellen und deren Abstand hat auf die Lage der Maxima und Minima nur insofern einen Einfluss, als dass die Auflösung der ermittelten Systemantwort variiert wird. Die Lage der Maxima und Minima wird durch eine Erhöhung der Anzahl der Frequenzstützstellen genauer bekannt. Für die Definition der Frequenzgruppen ist die genaue Lage der Maxima und Minima von untergeordnetem Interesse. Somit kann die Lage der Frequenzgruppen auch anhand einer grob aufgelösten Systemantwort mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden. Um dennoch eine ausreichende Sicherheit bei der Ermittlung der Lage der Frequenzgruppen zu erzielen, wird ein iteratives Verfahren verwendet. Dabei wird die Auflösung der Systemantwort schrittweise verfeinert und die Lage der Maxima und Minima neu bestimmt. Dadurch wird eine Reduktion des Berechnungsaufwands erreicht. Das Verfahren wird in Abbildung 3.7 illustriert.

Im ersten Schritt dieses iterativen Verfahrens werden nur Lösungen an jeder zehnten Frequenzstützstelle des interessierenden Frequenzbereichs ermittelt. Anhand dieser groben Näherungslösung werden die Frequenzgruppen bestimmt. In den folgenden Schritten wird die Anzahl der Frequenzstützstellen jeweils verdoppelt und die Lage der Frequenzgruppen neu ermittelt. In Abbildung 3.7 ist der bereits in Abbildung 3.2 gezeigte Frequenzgang mit variiertem Abstand der Frequenzstützstellen dargestellt.

Im Beispiel in Abbildung 3.7 wird der Abstand der Frequenzstützstellen von $\delta f = 40 \text{ Hz}$ in Abbildung 3.7a bis $\delta f = 1,25 \text{ Hz}$ in Abbildung 3.7f verfeinert. Die vertikalen gestrichelten Linien zeigen die Grenzen der Frequenzgruppen an. Die ab Abbildung 3.7b eingezeichneten vertikalen punktierten Linien markieren jeweils die

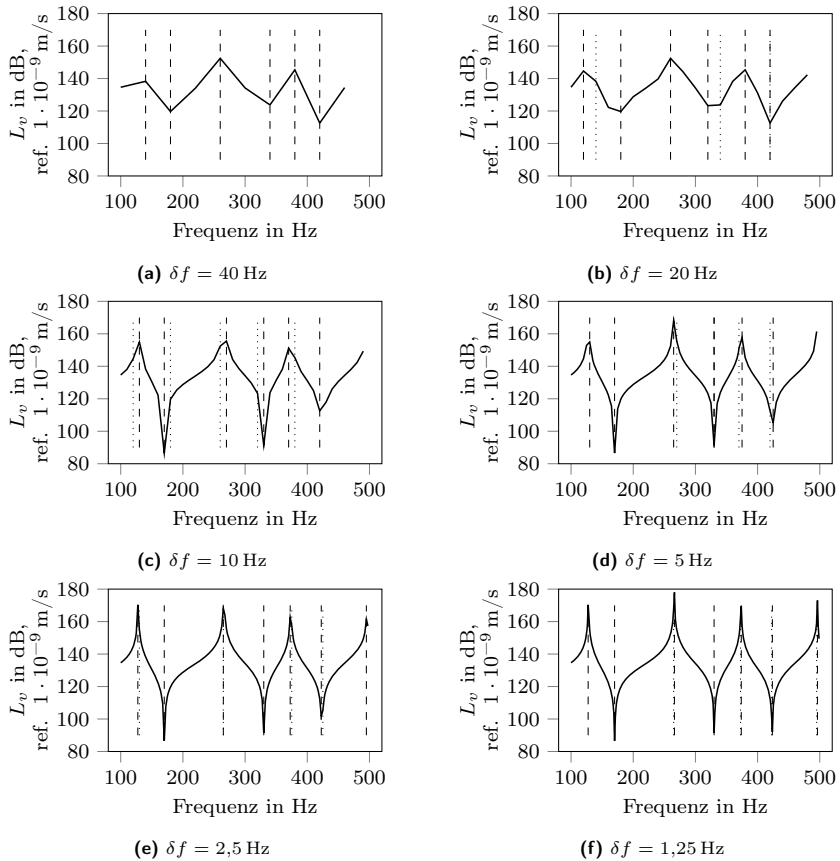


Abbildung 3.7.: Variation der Frequenzauflösung eines Frequenzgangs von $\delta f = 40 \text{ Hz}$ bis $\delta f = 1,25 \text{ Hz}$, ermittelte Grenzen der Frequenzgruppen (‘—’) und Grenzen der Frequenzgruppen aus vorherigem Verfeinerungsschritt (‘...’)

Grenzen der Frequenzgruppen des vorherigen Verfeinerungsschrittes. So sind beispielsweise in Abbildung 3.7b zusätzlich die Grenzen der Frequenzgruppen aus Abbildung 3.7a eingezeichnet. Es ist zu erkennen, dass die Grenzen der Frequenzgruppen mit jedem Verfeinerungsschritt genauer ermittelt werden. Bis zu einem Abstand der Frequenzstützstellen von $\delta f = 5 \text{ Hz}$ werden sechs Maxima und Minima der Systemantwort detektiert und somit sieben Frequenzgruppen definiert, vgl. Abbildung 3.7a-3.7d. Ab einem Abstand der Frequenzstützstellen von $\delta f = 2,5 \text{ Hz}$ wird ein weiteres Maximum und somit eine weitere Frequenzgruppe erkannt. Innerhalb der Modell-Management-Strategie wird das Verfahren abgebrochen, wenn sich bei

gleicher Anzahl der erkannten Frequenzgruppen die Lage der Frequenzgruppen von einem Verfeinerungsschritt zum Folgenden um weniger als 5 % ändert oder eine Lösung an jeder Frequenzstützstelle vorliegt. Dieser Fall ist in Abbildung 3.7 bei einem Abstand der Frequenzstützstellen von $\delta f = 5$ Hz, Abbildung 3.7d, erreicht.

3.5.5. Algorithmische Umsetzung der Modell-Management-Strategie

Die entwickelte Modell-Management-Strategie wird in einen Algorithmus implementiert, um sie als Verfahren während FEM-Berechnungen nutzen zu können. Dieser Algorithmus wird nachfolgend vorgestellt. Der Algorithmus wird unter Verwendung der Programmiersprache *python* implementiert. Für die FEM-Berechnungen steht die Software *ELPASO*² zur Verfügung. Die zur Nutzung des entwickelten Algorithmus erforderlichen Anpassungen der Eingabedatei für die FEM-Software werden Abschnitt B vorgestellt. In Abbildung 3.8 ist der implementierte Algorithmus als Ablaufdiagramm vorgestellt. Die einzelnen Schritte 1-14 des Algorithmus werden nachfolgend anhand der eingekreisten Ziffern vorgestellt. Dabei sind die Schritte 1-6 Vorbereitungen zur Ermittlung der Kosten der Modelle und der Budgetplanung. Während der Schritte 7-14 erfolgt die eigentliche Modellauswahl inklusive der Validierung der vereinfachten Modelle gegen das Referenzmodell.

Schritt 1) Im ersten Schritt des Algorithmus werden die zur Verfügung stehenden Modelle gesammelt. Die zur Verfügung stehenden Modelle werden hier zunächst als das zu lösende *Referenzmodell*, sowie die *Modelle A, ..., X* benannt. Eine FEM-Berechnung beginnt mit der Übergabe der Eingabedatei an die FEM-Software. Die Eingabedatei definiert das zu berechnende Modell durch Angabe aller Knoten und Elemente, Lasten und Randbedingungen. Innerhalb der Eingabedatei werden die zur Verfügung stehenden, vereinfachten Modelle genannt. Insgesamt stehen Q Modelle zur Lösung zur Verfügung.

Schritt 2) Im nächsten Schritt wird die zur Lösung jedes zur Verfügung stehenden Modells erforderliche Rechenzeit ermittelt. Dazu werden alle Modelle an wenigen Frequenzstützstellen (n_f^{KS}) gelöst. Die für die Lösung erforderliche Rechenzeit wird gemessen und auf die Anzahl der gelösten Frequenzstützstellen bezogen. Diese Rechenzeit je Frequenzstützstelle definiert die Kosten θ_q jedes Modells.

Schritt 3) Die zur Verfügung stehenden Modelle werden im dritten Schritt entsprechend der jeweiligen Kosten aufsteigend geordnet. Die in Schritt 1 gewählten Bezeichnungen Referenzmodell, Modell A, ..., X, werden durch die Position in der, anhand der Kosten aufsteigend ermittelten Reihenfolge, ersetzt. Das Modell mit den geringsten Kosten wird somit als *Modell 1*, das Modell mit den höchsten Kosten als *Modell Q* bezeichnet.

²*ELPASO*: elementary Parallel Solver, inhouse-Code des Instituts für Akustik, TU Braunschweig

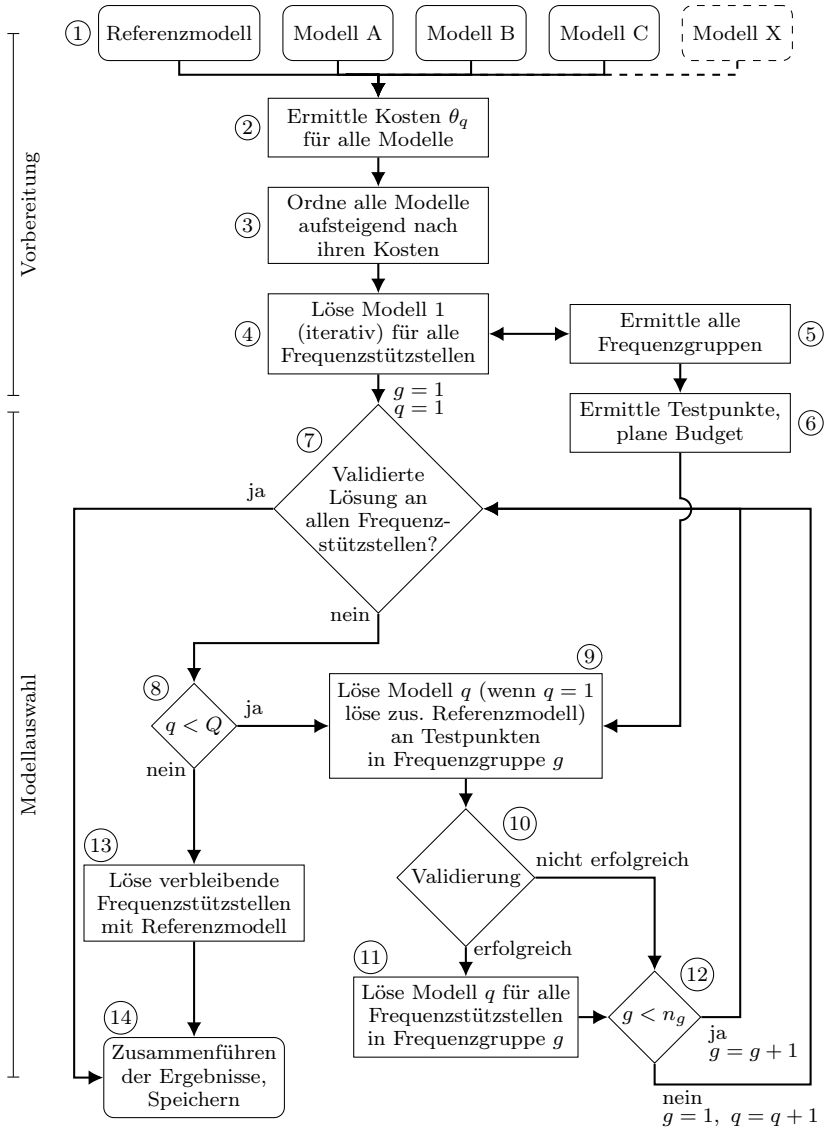


Abbildung 3.8.: Der Algorithmus des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens als Ablaufdiagramm; Zählvariable g , $g \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq n_g\}$, iteriert über alle detektierten Frequenzgruppen; Zählvariable q , $q \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq Q\}$, iteriert über die zur Verfügung stehenden Modelle.

Schritt 4) Im vierten Schritt wird eine erste Näherungslösung des zu ermittelnden Berechnungsergebnisses durch Lösung des Modells 1 ermittelt. Diese Berechnung dient vor allem der Ermittlung der Frequenzgruppen und wird durch iterative Verfeinerung der Frequenzauflösung beschleunigt, vgl. Abschnitt 3.5.4.

Schritt 5) Anhand des Ergebnisses aus Schritt 4 wird im fünften Schritt des Algorithmus die Lage der Frequenzgruppen ermittelt. Dazu wird die in der Eingabedatei angegebene Definition der Frequenzgruppen verwendet, vgl. Abschnitt 3.5.1.

Schritt 6) Die Budgetplanung und Ermittlung der Lage der Testpunkte innerhalb jeder Frequenzgruppe erfolgt in Schritt 6. Dabei wird Gleichung (3.24) ausgewertet. Damit ist die Anzahl der Testpunkte in jeder Frequenzgruppe bekannt. Mit dieser Information wird die Lage der Testpunkte innerhalb jeder Frequenzgruppe anhand des in der Eingabedatei definierten Verfahrens mit den Gleichungen (3.10)-(3.11) festgelegt, vgl. Abschnitt 3.5.2.

Schritt 7) Mit den in den Schritten 1-6 gewonnenen Informationen beginnt die Modellauswahl in Schritt 7. Dazu wird überprüft, ob bereits an allen Frequenzstützstellen ein validiertes Berechnungsergebnis vorliegt. Ein validiertes Berechnungsergebnis liegt vor, wenn die jeweiligen Frequenzstützstellen entweder mit dem Referenzmodell oder mit einem für die betrachtete Frequenzgruppe erfolgreich validierten vereinfachten Modell gelöst wurden. Aufgrund des iterativen Ablaufs des Verfahrens werden die nachfolgenden Schritte 7-13 wiederholt, bis für alle Frequenzstützstellen ein validiertes Berechnungsergebnis vorliegt. Zum Zeitpunkt des ersten Erreichens von Schritt 7 werden die Zählvariablen g und q eingeführt. Die Variable $g \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq n_g\}$ repräsentiert die Frequenzgruppen, die Variable $q \in \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq Q\}$ repräsentiert die zur Verfügung stehenden Modelle. Beide Variablen erhalten den Startwert $g = q = 1$. Beim ersten Erreichen von Schritt 7 liegt bereits aufgrund der in Schritt 4 mit Modell 1 berechneten Lösungen für einige Frequenzstützstellen ein Ergebnis vor. Da bisher noch keine Validierung durchgeführt wurde, folgt beim ersten Durchlauf der Iteration Schritt 8. Nachfolgend wird jeweils ein vereinfachtes Modell betrachtet. Die vereinfachten Modelle werden dabei anhand ihrer Kosten in aufsteigender Reihenfolge untersucht. Das jeweils betrachtete Modell wird für alle Frequenzgruppen in aufsteigender Reihenfolge validiert. Nach Untersuchung aller Frequenzgruppen wird das nächste Modell betrachtet. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle zur Verfügung stehenden Modelle untersucht wurden oder an allen Frequenzstützstellen ein validiertes Ergebnis vorliegt.

Schritt 8) In Schritt 8 wird überprüft, ob noch weitere, vereinfachte Modelle zur Verfügung stehen deren Einsetzbarkeit geprüft werden kann. Wenn bereits alle vereinfachten Modelle untersucht wurden ist $q = Q$. In diesem Fall wird zu Schritt 13

gesprungen. Wenn noch weitere, bisher nicht untersuchte vereinfachte Modelle zur Verfügung stehen ist $q < Q$ und es folgt Schritt 9.

Schritt 9) In Schritt 9 wird das betrachtete Modell q an den in Schritt 6 bestimmten Testpunkten in der Frequenzgruppe g gelöst. Im ersten Durchlauf des Verfahrens ($q = 1$) wird zusätzlich das Referenzmodell an den Testpunkten ausgewertet. Sofern das betrachtete Modell das Referenzmodell selbst ist, wird der Schritt übersprungen.

Schritt 10) Der Validierungsprozess der vereinfachten Modelle erfolgt in Schritt 10. Dazu werden die Berechnungsergebnisse des vereinfachten und des Referenzmodells miteinander verglichen. Als Validierungskriterium wird das in der Eingabedatei angegebene Verfahren aus Abschnitt 3.5.2 verwendet. Auf Basis des Validierungskriteriums wird die Eignung des untersuchten, vereinfachten Modells bewertet. Wird das untersuchte Modell als erfolgreich validiert eingestuft folgt Schritt 11, sonst wird zu Schritt 12 gesprungen.

Schritt 11) Schritt 11 wird nur ausgeführt, wenn das untersuchte, vereinfachte Modell als erfolgreich validiert eingestuft wird. In diesem Schritt wird das untersuchte Modell für alle verbleibenden Frequenzstützstellen innerhalb der Frequenzgruppe g ausgewertet.

Schritt 12) Bei Erreichen von Schritt 12 ist die Untersuchung des vereinfachten Modells q für die Frequenzgruppe g abgeschlossen. In Schritt 12 wird geprüft, ob noch weitere Frequenzgruppen innerhalb des Frequenzbereichs zu untersuchen sind. Wenn $g < n_g$ ist, dann sind noch weitere Frequenzgruppen vorhanden, in denen das zu untersuchende, vereinfachte Modell noch nicht validiert wurde. In diesem Fall wird die Zählvariable g um eins erhöht und der Validierungsprozess für die nächste Frequenzgruppe in Schritt 7 begonnen. Für den Fall $g = n_g$ wurde das vereinfachte Modell q alle Frequenzgruppen validiert. In diesem Fall wird die Zählvariable $g = 1$ gesetzt und die Zählvariable q um eins erhöht. Der Validierungsprozess beginnt in Schritt 7 für das nächste vereinfachte Modell in der ersten Frequenzgruppe.

Schritt 13) In diesem Schritt werden alle Frequenzstützstellen, für die noch kein Ergebnis berechnet wurde, mittels des Referenzmodells gelöst. Nach Schritt 13 liegen für alle Frequenzstützstellen im Frequenzbereich validierte Berechnungsergebnisse vor.

Schritt 14) Das Verfahren endet in Schritt 14. In diesem Schritt werden die bisher für einzelne Frequenzstützstellen vorliegenden Ergebnisse zusammengeführt und abgespeichert. Die Ergebnisse werden in gleicher Weise aufbereitet, wie sie nach der direkten Lösung eines einzelnen Modells vorliegen.

3.6. Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung

Die entwickelte Modell-Management-Strategie zielt auf die Reduktion der erforderlichen Rechenzeit durch Nutzung vereinfachter Modelle zusätzlich zu einem Referenzmodell ab. Dabei werden die zur Verfügung stehenden vereinfachten Modelle gegen das Referenzmodell validiert und in Frequenzbereichen, in denen die Validierung erfolgreich ist, eingesetzt. Die Modell-Management-Strategie ist konservativ konstruiert, der Fokus wird auf eine möglichst umfangreiche Validierung der vereinfachten Modelle gelegt. Die Reduktion der Rechenzeit wird durch die Ausnutzung von Vereinfachungen erreicht, die während des Prozesses identifiziert werden. Am Ende der Berechnung liegt das gesuchte Berechnungsergebnis vor. Darüber hinaus ist bekannt, in welchen Frequenzbereichen welches Modell eingesetzt werden kann. Diese Information wird abgespeichert und kann wiederverwendet werden.

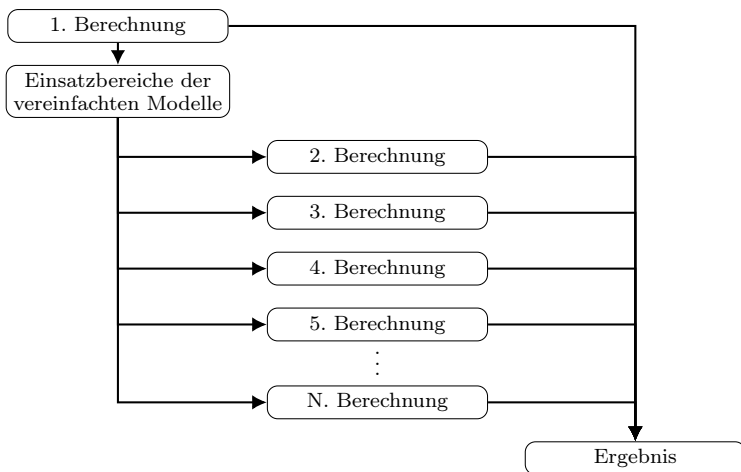


Abbildung 3.9.: Strategie zur Nutzung der bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle bei vielen Berechnungen im Rahmen der Unsicherheitsquantifizierung

Im Rahmen von stochastischen Untersuchungen sind viele gleichartige Berechnungen erforderlich. Wie in Abschnitt 2.3 vorgestellt, basieren einige der Verfahren der Unsicherheitsquantifizierung und Sensitivitätsanalyse auf Monte Carlo-Simulationen. Dabei sind sehr viele gleichartige Auswertungen eines Modells mit variierenden Eingangsgrößen durchzuführen. Die Klasse dieser Verfahren wird in [105] als „Vielfachauswertungs“-Anwendungen³ bezeichnet. Für Berechnungen der Unsicherheitsquantifizierung werden dazu die Eingangsgrößen zufällig als Realisierungen

³ aus dem Englischen übersetzt; im Original: „many-query application“ [105, S. 2]

der als Zufallsvariablen modellierten Eingangsparameter gezogen. Für die Verfahren der Sensitivitätsanalyse werden beispielsweise SOBOL-Sequenzen zur Erzeugung der Eingangsgrößen verwendet.

Die Nutzung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung wird in Abbildung 3.9 illustriert. Nach einer ersten Berechnung mittels der entwickelten Modell-Management-Strategie liegen die Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle im Frequenzbereich vor. Für alle weiteren Berechnungen entfällt der Schritt der Validierung der vereinfachten Modelle. Stattdessen werden die vereinfachten Modelle direkt jeweils für die Frequenzbereiche ausgewertet, für die sie in der ersten Berechnung validiert wurden. Dadurch wird eine, im Vergleich zur ersten Berechnung, große Rechenzeiterparnis erreicht. Im Rahmen der in [105] vorgestellten Ausprägungen der Modell-Management-Strategien entspricht diese Nutzungsart dem Konzept der *Filterung*. Dabei wird durch die Modell-Management-Strategie entschieden, welches der zur Verfügung stehenden Modelle eingesetzt wird, vgl. Abschnitt 2.2.5. Für dieses Vorgehen wird die Annahme verwendet, dass die Variation der Eingangsgrößen die bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle nicht beeinflusst. Die Anwendung des hier entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung wird in Kapitel 5 vorgestellt.

4. Verifikation des Multi-Modell-Verfahrens für einzelne Berechnungen

Das in dieser Arbeit entwickelte Multi-Modell-Verfahren zur Beschleunigung von FEM-Berechnungen im Frequenzbereich wird in diesem Kapitel auf verschiedene Testfälle angewendet. Das Ziel dieser Untersuchungen ist es, die Wirksamkeit des Verfahrens zu verifizieren und die für den Einsatz wesentlichen Eigenschaften aufzuzeigen. Die Untersuchungen beschränken sich dabei auf die Anwendung für eine einzelne Berechnung. Untersuchungen zur Anwendung des Verfahrens auf Vielfachauswertungs-Anwendungen im Rahmen von stochastischen Untersuchungen mit dem Ziel der Unsicherheitsquantifizierung und der Sensitivitätsanalyse werden in Kapitel 5 vorgestellt.

In Abschnitt 1.1 wird die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Definition eines Modells angegeben: „Ein Modell ist ein vereinfachendes Abbild eines Teils der durch einen Beobachter rezipierten Realität.“ Der in Abbildung 1.1 vorgestellte Modellierungsprozess dient der Konstruktion von Modellen. Dabei wird das Realitätsmodell, welches der durch den Beobachter rezipierten Realität entspricht, zunächst in ein mathematisches Modell überführt. Die beobachteten Phänomene werden mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben. Um diese Gleichungen zu lösen, wird aus dem mathematischen Modell das numerische Modell abgeleitet. Das numerische Modell wird mit einem Computer gelöst, dazu wird es in Computercode übersetzt. Jede dieser Abstraktionsebenen des Modellierungsprozesses ermöglicht die Ableitung vereinfachter Modelle. Die so erzeugten, vereinfachten Modelle resultieren letztlich in einem numerischen Modell geringerer Komplexität. Die nachfolgend vorgestellten Testfälle betrachten jeweils die Ableitung vereinfachter Modelle, ausgehend von einer der genannten Abstraktionsebenen des Modellierungsprozesses. Eine Übersicht aller Verifikationsbeispiele ist auch in Tabelle 4.1 gegeben.

Die Ableitung vereinfachter Modelle durch Variation des numerischen Modells wird in Abschnitt 4.1 vorgestellt. Die Beispiele in Abschnitt 4.1.1 betrachten jeweils eine Fragestellung aus der Berechnung von Körperschall und Luftschall. Beide Beispiele verwenden, im Vergleich zu dem Referenzmodell, gröbere Diskretisierungen zur Erzeugung der vereinfachten Modelle. Dazu werden von dem Referenzmodell, durch sukzessive Erhöhung der Elementkantenlänge, vereinfachte numerische Modelle abgeleitet. Diese Modelle erfordern weniger Zeit zur Lösung, sind demgegenüber nur in einem eingeschränkten Frequenzbereich verwendbar. Die FEM wird verwendet, um die partiellen Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen zu überführen. Für wenige Spezialfälle kann für partielle Differentialgleichungen eine analytische Lösung

gefunden werden. Als zweites Beispiel der Ableitung vereinfachter numerischer Modelle wird daher in Abschnitt 4.1.2 die Verwendung von analytischen Lösungen, gemeinsam mit einem mit der FEM zu lösenden Referenzmodell, vorgestellt.

Neben der Variation des numerischen Modells kann auch das mathematische Modell variiert werden, um vereinfachte Modelle eines Referenzmodells abzuleiten. In Abschnitt 4.2 werden für diesen Fall ebenfalls zwei Verifikationsbeispiele vorgestellt. Dabei wird in Abschnitt 4.2.1 die Nutzung alternativer Elementformulierungen zur Erstellung der vereinfachten Modelle verwendet. Dazu werden Volumenelemente durch Plattenelemente ersetzt. Aufgrund der Wahl der Elemente und der damit verbundenen Beschränkung auf bestimmte, der Fragestellung angepasste Differentialgleichungen wird ebenfalls eine Reduktion der entstehenden Gleichungssysteme erzielt. In Abschnitt 4.2.2 wird das vereinfachte Modell durch Verwendung eines alternativen Materialmodells erzeugt. Dieses Materialmodell berücksichtigt ebenfalls nur eine Teilmenge der durch das Referenzmodell modellierten Phänomene durch eine Beschränkung der berücksichtigten Gleichungen. Die reduzierte Komplexität erfordert für das resultierende, numerische Modell weniger FHG je Knoten. Dadurch wird ebenfalls das entstehende Gleichungssystem reduziert. In Abschnitt 4.3 wird durch eine Variation des Realitätsmodells eine Reduktion der Komplexität auf der ersten Ebene des Modellierungsprozesses erzielt. Dabei wird zur Erzeugung des vereinfachten Modells ein Teil des zu modellierenden Systems vernachlässigt.

Tabelle 4.1.: Übersicht der in dieser Arbeit untersuchten Verifikationsbeispiele

Ebene des Modellierungsprozesses	Methode zur Ableitung des vereinfachten Modells	Abschnitt
numerisches Modell	Variation der Diskretisierung	4.1.1
	Nutzung analytischer Lösung	4.1.2
mathematisches Modell	Variation der Elementformulierung	4.2.1
	Variation des Materialmodells	4.2.2
Realitätsmodell	Vernachlässigung eines Geometrieteils	4.3

Nach der Darstellung der Verifikationsbeispiele wird in Abschnitt 4.4 eine Untersuchung der Eigenschaften des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens vorgestellt. Eine für die Anwendung des Verfahrens wesentliche Größe ist die Anzahl der vereinfachten Modelle. Je mehr Modelle verwendet werden, desto mehr Validierungsprozesse sind erforderlich. Andererseits besteht bei der Verwendung mehrerer vereinfachter Modelle die Chance, jeweils das am besten geeignete Modell in einzelnen Frequenzbereichen zu verwenden. Der Einfluss der Anzahl vereinfachter Modelle auf die erzielte Rechenzeitersparnis wird daher in Abschnitt 4.4.1 untersucht. Während der Vorstellung der Entwicklung des Multi-Modell-Verfahrens wird in Abschnitt 3.5.4 ein Abbruchkriterium für das Verfahren vorgestellt. Dabei wird die Entscheidung, ob ein vereinfachtes Modell in einer weiteren Frequenzgruppe validiert wird, als Zufallsvariable modelliert. Die Entscheidung für die Validierung in einer weiteren Frequenzgruppe wird zunehmend unwahrscheinlich, je mehr Validierungsprozesse zu diesem

Zeitpunkt der Berechnung bereits nicht erfolgreich waren. Aufgrund dieser zufallsbasierten Entscheidung ist das Verfahren nicht deterministisch. Der Einfluss dieses Abbruchkriteriums wird in Abschnitt 4.4.2 untersucht. Während der Anwendung des Verfahrens ist durch den Anwender¹ sowohl das zu verwendende Validierungskriterium zu wählen, als auch der zulässige Fehler an den Testpunkten vorzugeben. Beide Entscheidungen wirken sich ebenfalls auf das Berechnungsergebnis aus. Dieser Einfluss wird in den Abschnitten 4.4.3 und 4.4.4 untersucht.

Die Berechnungsergebnisse aller Untersuchungen werden, neben der optisch erkennbaren Übereinstimmung, mit Fehlermaßen verglichen. Da alle im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Beispiele aus dem Bereich der Akustik entnommen sind, werden die Ergebnisgrößen immer als Pegel dargestellt. Dazu wird die jeweils betrachtete Größe gemäß Gleichung (2.23) in einen Pegel umgerechnet. Für Feldgrößen wird der Parameter $\epsilon = 2$ gewählt, für Energiegrößen, wie beispielsweise das in Abschnitt 5.2 betrachtete Schalldämm-Maß, ist $\epsilon = 1$ (vgl. Abschnitt 2.1.4). Der Pegelbezugswert Y_0 wird entsprechend der Ausgangsgröße Y nach [47] gewählt.

$$L_Y(f_i) = 10 \lg \left(\frac{Y(f_i)}{Y_0} \right)^\epsilon \text{ dB} \quad (2.23)$$

Aufgrund der Betrachtung des Pegels der berechneten Systemantwort werden auch die verwendeten Fehlermaße als Pegelgröße definiert. Dadurch wird der Fehler relativ zu der Systemantwort interpretierbar. Für jedes Beispiel wird der Vektor der Systemantwort \mathbf{Y}^{Ref} bestimmt. Dieser Vektor enthält die Werte der Systemantwort an allen Frequenzstützstellen bei direkter Lösung des Referenzmodells, ohne Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens. Weiterhin wird die jeweilige Berechnung mit dem entwickelten Multi-Modell-Verfahren durchgeführt, als Ergebnis wird der Vektor der Systemantwort \mathbf{Y}^{MMV} erhalten. Zur Quantifizierung des Fehlers abhängig von der Frequenz wird für alle Untersuchungen der Betrag der Pegeldifferenz der mit dem Referenzmodell berechneten Systemantwort und dem mit dem Multi-Modell-Verfahren ermittelten Berechnungsergebnis $|L_{\mathbf{Y}^{\text{Ref}}} - L_{\mathbf{Y}^{\text{MMV}}}|$ über der Frequenz aufgetragen. Der maximale Fehler der approximierten Systemantwort wird angegeben. Weiterhin wird der mittlere Fehler Ψ als Pegel der mittleren Abweichung der beiden Lösungsvektoren entsprechend Gleichung (4.1) definiert:

$$\Psi = 10 \cdot \lg \left(\frac{1}{n_f^{\text{ges}}} \sum_{i=1}^{n_f^{\text{ges}}} 10^{\frac{|L_{Y_i}^{\text{Ref}} - L_{Y_i}^{\text{MMV}}|}{10 \text{ dB}}} \right) \text{ dB} \quad (4.1)$$

Zusätzlich wird für beide Lösungen jeweils die erforderliche Rechenzeit verglichen. Dazu werden beide Varianten nacheinander auf demselben Computer gelöst und die jeweiligen Rechenzeiten gemessen. Als Computer wird ein *Intel Core i5-8350U*

¹Der „Anwender“ ist im Rahmen dieser Arbeit die das Verfahren anwendende Person und wird als nicht geschlechtsspezifische Bezeichnung verwendet.

Quad Core Prozessor mit einer Taktfrequenz von 1,7 GHz verwendet. Die verwendete FEM-Software ist die Forschungssoftware *ELPASO*. Dabei wird für die Messung der Rechenzeit nur die Zeit für die Assemblierung und Lösung der Systemmatrizen berücksichtigt. Nach der Lösung der Systemmatrizen erfolgt das Postprocessing, dabei wird aus den Werten der FHG des Systems die Systemantwort $\mathbf{Y}^{\text{Ref/MMV}}$ ermittelt. Dieser Prozess ist zeitaufwändig und wird durch die Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens nicht beeinflusst. Dadurch wird der Effekt des Multi-Modell-Verfahrens auf die Rechenzeiterparnis kompensiert. Um dennoch die Wirkung des Multi-Modell-Verfahrens beurteilen zu können wird daher die für das Postprocessing erforderliche Zeit nicht in die Messung der Rechenzeit einbezogen.

Die Berechnungen werden jeweils unter Nutzung eines Prozessors und unter Verwendung von vier Prozessoren parallel ausgeführt. Dabei kommt die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Methode der Verteilung der Frequenzstützstellen auf verschiedene Prozessoren zur Anwendung. Aufgrund der grundsätzlichen Ähnlichkeit werden die Ergebnisse in diesem Kapitel jeweils vor allem basierend auf dem mit vier Prozessoren erzielten Berechnungsergebnis diskutiert. Die zugehörigen Diagramme sind in diesem Kapitel dargestellt. Bei der Diskussion wird auch auf die Unterschiede zu dem mit einem Prozessor erzielten Ergebnis eingegangen. Die Diagramme der Berechnungen mit einem Prozessor sind im Anhang in Abschnitt C zu finden.

Wie in Abschnitt 4.4.3 gezeigt werden wird, ist die Wahl eines für eine Berechnung geeigneten Validierungskriteriums herausfordernd. Für Berechnungen in der Akustik sind, aufgrund der typischerweise hohen Dynamik der Systemantwort, relative Maße und Pegelmaße als Validierungskriterien besonders geeignet. Daher wird für die Berechnungsbeispiele der nachfolgenden Abschnitte jeweils die einfache oder mittlere Pegeldifferenz als Validierungskriterium verwendet. Neben dem Validierungskriterium ist der an den Testpunkten tolerierte Fehler als Einstellungsparameter des Multi-Modell-Verfahrens erforderlich. In Abschnitt 4.4.4 wird der Einfluss dieser Größe systematisch quantifiziert. Grundsätzlich korreliert ein großer tolerierter Fehler mit einer weniger genauen Lösung und einer hohen Rechenzeiterparnis. Für einen geringen tolerierten Fehler gilt analog eine geringe Rechenzeiterparnis in Verbindung mit einem genaueren Berechnungsergebnis. Die in den folgenden Verifikationsbeispielen gewählten Werte des tolerierten Fehlers sind willkürlich gewählt und daher als Beispiele zu betrachten.

4.1. Variation des numerischen Modells

In diesem Abschnitt wird die Variation des numerischen Modells als Beispiel zur Ableitung vereinfachter Modelle untersucht. Die Erzeugung des numerischen Modells ist, von der Implementierung in Computercode abgesehen, der letzte Schritt des Modellierungsprozesses. Eine Möglichkeit dazu besteht in der Nutzung größerer Diskretisierungen. Wie bereits in Abschnitt 1.2 erwähnt, ist, für Berechnungen mittels Diskretisierungsverfahren in der Akustik, die erforderliche Diskretisierung ab-

hängig von der die Fragestellung bestimmenden, kleinsten Wellenlänge und damit von der Frequenz. Diskretisierungen mit verschiedenen Elementkantenlängen sind somit für unterschiedliche Frequenzbereiche verwendbar. Die Nutzung variierender Diskretisierungen zur Ableitung vereinfachter Modelle erscheint für akustische Anwendungen somit als intuitiver Ansatz. Daher wird mit diesem Fall begonnen. Dazu werden in Abschnitt 4.1.1 zwei Beispiele, jeweils ein Beispiel aus dem Bereich des Körperschalls und ein Beispiel aus dem Bereich des Luftschalls, vorgestellt. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Nutzung alternativer Methoden zur Überführung der partiellen Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen. Als Beispiel für diesen Ansatz wird in Abschnitt 4.1.2 die Verwendung analytischer Lösungen vorgestellt.

4.1.1. Variation der Diskretisierung

Im folgenden Abschnitt wird das entwickelte Multi-Modell-Verfahren für den Fall der Variation des numerischen Modells durch Nutzung größerer Diskretisierungen verifiziert. Das numerische Modell entsteht durch Anwendung der FEM auf das mathematische Modell und überführt die partiellen Differentialgleichungen in ein System algebraischer Gleichungen. Die Anzahl der Gleichungen des Gleichungssystems ist identisch mit der Anzahl FHG des Systems. Die Anzahl der FHG hängt wiederum von der Anzahl der Elemente, der Anzahl Knoten je Element und der Anzahl FHG je Knoten ab. Somit kann durch die Variation der Diskretisierung, also die Variation der Abmessungen der verwendeten Elemente, die Anzahl der FHG des Systems variiert werden. Demgegenüber ist die Anwendbarkeit im Frequenzbereich der so erzeugten Modelle von der Elementkantenlänge abhängig. Mit zunehmender Elementkantenlänge nimmt die maximale Frequenz ab, für die eine Diskretisierung noch anwendbar ist.

Berechnung der Biegeschwingungen einer Fensterscheibe

Als Beispielfragestellung für eine Körperschallberechnung wird die Berechnung der Schwingschnelle einer Fensterscheibe gewählt. Als Anregung wird eine punktförmige Einheitskraft verwendet. Die berechnete Schwingschnelle ist somit vom Betrag identisch mit der Admittanz oder Mobilität. Das verwendete Geometriemodell ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt. Die Geometrie ist ein zweidimensionales Gebiet mit den Kantenlängen 1,5 m und 2,1 m. Die Dicke der Scheibe beträgt 0,01 m. Alle weiteren, für die Modellierung relevanten Daten sowie die verwendeten Parameter des Multi-Modell-Verfahrens sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Diese Darstellung wird auch für alle weiteren Untersuchungen beibehalten. Das Materialverhalten wird mittels eines isotropen, linear elastischen Materialmodells modelliert.

Berechnet wird die sich einstellende Schwingschnelle an dem in Abbildung 4.1 mit einem v markierten Ort (1,4/1,2) m. Als Last wird eine Punktlast mit einer Kraftamplitude von 1 N an dem mit einem F markierten Ort (0,8/0,6) m verwendet. Der für

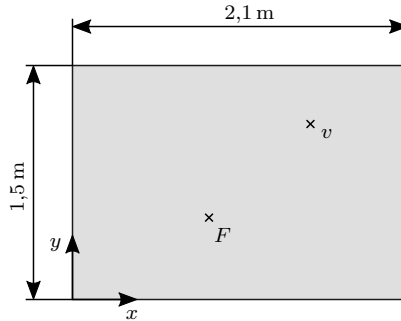


Abbildung 4.1.: Geometrie der Fensterscheibe zur Variation des numerischen Modells durch Variation der Diskretisierung. Ort der Kraftanregung F , Ort der Auswertung der Schwingsschnelle v . Alle Kanten eingespannt.

die Berechnung verwendete Frequenzbereich ist 100 – 1.500 Hz mit 701 Frequenzstützstellen. Der Abstand der Frequenzstützstellen beträgt 2 Hz. Als Validierungskriterium wird eine mittlere Pegeldifferenz von $\Pi^{\text{MPD}} = 3,0 \text{ dB}$ verwendet.

Das in Abbildung 4.1 gezeigte Modell wird mittels der FEM in ein numerisches Modell überführt. Zur Diskretisierung des Berechnungsgebiets werden Schalenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Die Elemente verwenden für den Plattenanteil die Plattentheorie nach MINDLIN, der Einfluss der Schubspannungen wird somit berücksichtigt. Alle Kanten des Fensters werden als eingespannt modelliert, alle FHG der Knoten auf den Kanten sind somit identisch null. Die Diskretisierung des Fensters wird anhand der zu erwartenden Biegewellenlänge festgelegt. Die Biegewellenlänge λ_B einer Platte kann für die Frequenz f mittels Gleichung (4.2) aus den Materialparametern E-Modul E , Dichte ρ und Poisson-Zahl ν sowie der Dicke d der Platte bestimmt werden:

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \sqrt[4]{\frac{E d^2}{12(1 - \nu^2)\rho}} \quad (4.2)$$

Gleichung (4.2) gilt exakt für eine unendlich ausgedehnte Platte. Für eine endliche Platte handelt es sich um eine Näherung. Mit den Materialparametern aus Tabelle 4.2 und Gleichung (4.2) ergibt sich die Biegewellenlänge für die maximale Frequenz von 1.500 Hz zu $\lambda_B (f = 1.500 \text{ Hz}) = 0,27 \text{ m}$. Bereits in Abschnitt 1.2 wird die Vorgabe von sechs Elementknoten je Wellenlänge als Regel zur Diskretisierung des Berechnungsgebiets bei FEM-Berechnungen in der Akustik eingeführt. Mit der berechneten, kleinsten Biegewellenlänge von 0,27 m ergibt sich für diese Forderung ein Abstand zweier benachbarter Elementknoten von 0,045 m, kleinere Abstände führen zu einer Erhöhung der Genauigkeit. Die Diskretisierung verwendet Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen. Jedes Element besitzt drei Knoten auf jeder

Tabelle 4.2.: Modellparameter der Fensterscheibe und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des numerischen Modells

Materialdaten		Diskretisierung (Referenzmodell)	
E-Modul	$E = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Elementkantenlänge	$\beta = 0,05 \text{ m}$
Dichte	$\rho = 2.460 \text{ kg/m}^3$	Elementtyp	9-Knoten Schalen
Poisson-Zahl	$\nu = 0,46$	Ansatzfunktion	quadratisch
Glasdicke	$d = 0,01 \text{ m}$	Anzahl FHG	31.110
Randbedingungen / Lasten			
		Randbedingung	eingespannt (alle Kanten)
		Last	Punktkraft, $F' = 1 \text{ N}$
Parameter Multi-Modell Verfahren			
Validierungskriterium		mittlere Pegeldifferenz	
Zulässiger Fehler		3,0 dB	
Vereinfachte Modelle (Anzahl)		2	
Vereinfachte Modelle (Art)		Variation der Diskretisierung	
Ergebnisgröße		Schwingschnelle in (0,8/0,6) m	
Frequenzbereich		100 – 1.500 Hz	
Anzahl Frequenzstützstellen		701	
Frequenzauflösung		2 Hz	

Elementkante. Werden zwei Elemente miteinander verbunden, so teilen sie sich einen Knoten. Mit einer Elementkantenlänge $\beta = \lambda_B/3$ werden somit sieben Knoten je Biegewellenlänge eingehalten. Mit $\beta = \lambda_B/5$ sind elf Knoten je Biegewellenlänge vorhanden.

Für die Berechnung werden die in Abbildung 4.2 dargestellten FEM-Diskretisierungen verwendet. Das Referenzmodell wird dazu mit einer Elementkantenlänge von $\beta^{\text{Ref}} = 0,05 \text{ m}$ diskretisiert, vgl. Abbildung 4.2a. Die Diskretisierung ist somit sehr fein, es werden etwas mehr als elf Knoten je Biegewellenlänge verwendet. Zusätzlich werden zwei vereinfachte Modelle mit jeweils größeren Diskretisierungen verwendet. Das vereinfachte Modell 1 (VM 1) verwendet eine Elementkantenlänge von $\beta^{\text{VM } 1} = 0,1 \text{ m}$ (vgl. Abbildung 4.2b), das vereinfachte Modell 2 (VM 2) verwendet eine Elementkantenlänge von $\beta^{\text{VM } 2} = 0,15 \text{ m}$ (vgl. Abbildung 4.2c). Die Randbedingungen und Lasten sind in Abbildung 4.2 nicht dargestellt, sie werden für alle Modelle entsprechend Abbildung 4.1 modelliert. Dabei führt die Vergrößerung der Elementkantenlänge dazu, dass die Orte der Lasteinleitung und der Auswertung der Schwingschnelle nicht immer identisch mit dem Ort eines Knotens sind. Aufgrund der verwendeten FEM-Software wird in diesem Fall jeweils der Knoten verwendet, der dem korrekten Ort am nächsten liegt. Dies erzeugt zusätzliche Abweichungen

der mit den vereinfachten Modellen berechneten Systemantworten gegenüber dem Referenzmodell.

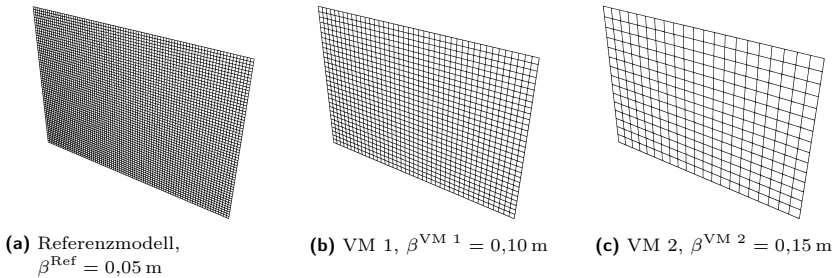


Abbildung 4.2.: FEM-Diskretisierungen des Referenzmodells sowie der zwei verwendeten vereinfachten Modelle (VM 1/2). Die Reduktion des Berechnungsaufwands wird durch eine Vergröberung der Diskretisierung erreicht.

Die Modelle sind aufgrund ihrer jeweiligen Diskretisierung in verschiedenen Frequenzbereichen einsetzbar. Nachfolgend wird von einer Ziel-Diskretisierung von zehn Knoten je Biegewellenlänge ausgegangen. Für das Referenzmodell wird diese Grenze bei 2.152 Hz erreicht. Das Modell VM 1 erreicht die Grenze bereits bei 538 Hz, das Modell VM 2 bereits bei 239 Hz. Somit kann das Referenzmodell im gesamten, interessierenden Frequenzbereich eingesetzt werden. Demgegenüber können die vereinfachten Modelle nur in Teilbereichen des gesamten Frequenzbereichs verwendet werden.

Das Berechnungsergebnis für die auf vier Prozessoren parallelisierte Berechnung ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Das Ergebnis für die Berechnung auf einem Prozessor ist im Anhang in Abbildung C.1 zu finden. In der oberen Darstellung der nachfolgend gezeigten Diagramme ist die Systemantwort der direkten Lösung des Referenzmodells ohne Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens sowie die Systemantwort mit Verwendung der zusätzlichen, vereinfachten Modelle dargestellt. Aufgetragen ist der Pegel der sich einstellenden Schwingschnelle am in Abbildung 4.1 mit einem v markierten Ort über der Frequenz. Der Pegel der Schwingschnelle wird entsprechend Gleichung (2.23) mit $\epsilon = 2$ gebildet, der Bezugswert ist $v_0 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$ gemäß [47]. In der Mitte ist der Betrag der Pegeldifferenz der berechneten Systemantworten aufgetragen, im unteren Bereich des Diagramms ist für jede zwölfte Frequenzstützstelle das verwendete Modell markiert.

Der Vergleich der mittels des Referenzmodells ermittelten Systemantwort mit dem unter Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens berechneten Ergebnis zeigt eine grundsätzlich große Ähnlichkeit der Berechnungsergebnisse. Für den Fall der Berechnung parallel auf vier Prozessoren, siehe Abbildung 4.3, werden die vereinfachten Modelle ausschließlich unterhalb von 566 Hz verwendet. Dabei wird das Modell VM 2 bis zu einer Frequenz von 216 Hz eingesetzt. Im Bereich von 218 – 334 Hz

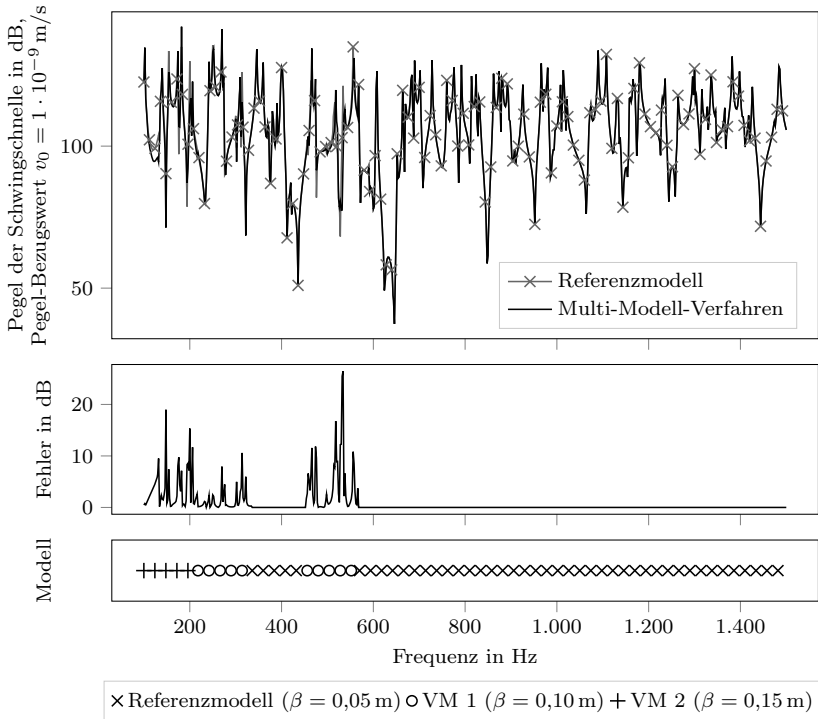


Abbildung 4.3.: Vergleich der berechneten Schwingschnelle mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der Systemantworten (Mitte), Einsatzbereiche der verwendeten Modelle (unten). Variation der Diskretisierung.

wird das Modell VM 1 verwendet. Außerdem kommt dieses Modell im Bereich von 454 – 566 Hz zur Anwendung. In den verbleibenden Frequenzbereichen wird das Referenzmodell verwendet. Die durch die Modell-Management-Strategie ermittelten Einsatzbereiche der verschiedenen Modelle entsprechen näherungsweise den anhand der verwendeten Diskretisierungen ermittelten Erwartungen. Demgegenüber wird nicht erwartet, dass auch zwischen 336 Hz und 452 Hz das Referenzmodell verwendet wird. Gut zu erkennen ist der eher große Fehler bei Verwendung des vereinfachten Modells VM 2 unterhalb 216 Hz und die Reduktion des Fehlers beim Wechsel auf das höherwertige Modell VM 1 bei 218 Hz. Dabei fällt auf, dass die Abweichung der mit dem Multi-Modell-Verfahren berechneten Systemantwort von dem mit dem Referenzmodell ermittelten Ergebnis in schmalen Frequenzbereichen durchaus höher sein kann als durch das Validierungskriterium vorgegeben wird. Der Grund ist die Validierung des vereinfachten Modells an nur wenigen Testpunkten gegen das Re-

ferenzmodell. Der größte Fehler der mit dem Multi-Modell-Verfahren berechneten Systemantwort im gesamten Frequenzbereich beträgt 26,4 dB. Derart hohe Fehler werden allerdings nur für sehr wenige Frequenzstützstellen erreicht, in den meisten Bereichen ist der Fehler deutlich geringer. Weiterhin ist bemerkenswert, dass das vereinfachte Modell VM 1 in einem höheren Frequenzbereich (454 – 566 Hz) zur Anwendung kommt, während in einem niedrigeren Frequenzbereich (336 – 452 Hz) bereits das Referenzmodell verwendet wird. Der Grund dafür ist das Konzept der Validierung der vereinfachten Modelle für alle Frequenzgruppen. Es wird nicht ausgeschlossen, dass ein vereinfachtes Modell in einem höheren Frequenzbereich verwendet werden kann, während in einem niedrigen Frequenzbereich keine ausreichende Ergebnisqualität erzielt wird. Ein Beispiel für diesen Effekt kann die gemeinsame Nutzung eines mit der FEM zu lösenden Referenzmodells mit einem mit der SEA zu lösenden vereinfachten Modell sein. Die SEA liefert vor allem im hohen Frequenzbereich zuverlässige Ergebnisse, während die Ergebnisse im niedrigen Frequenzbereich bei zu geringer Modendichte sehr ungenau sind. Deshalb wird jedes vereinfachte Modell für jede Frequenzgruppe gegen das Referenzmodell validiert. Dabei ist es unerheblich, welche Modelle für die zuvor untersuchten Frequenzgruppen verwendet werden. Somit kann ein vereinfachtes Modell auch in einer Frequenzgruppe verwendet werden, wenn das Referenzmodell bereits bei einer niedrigeren Frequenz verwendet wurde.

Tabelle 4.3.: Vergleich der Rechenzeiterparnis und des mittleren Fehlers mit und ohne Parallelisierung bei Variation des numerischen Modells durch Nutzung größerer Diskretisierungen am Beispiel einer Körperschallberechnung

Anzahl Prozessoren	Rechenzeiterparnis		Mittlerer Fehler Ψ
	1	5 %	
	4	11 %	

Die quantitativen Vergleichsgrößen zur Rechenzeiterparnis sowie dem resultierenden mittleren Fehler sind in Tabelle 4.3 sowohl für die Berechnung auf einem, als auch parallel auf vier Prozessoren angegeben. Diese Darstellung wird auch für alle folgenden Beispiele verwendet. Der aufgrund der Verwendung der vereinfachten Modelle generierte mittlere Fehler beträgt bei Berechnung mit vier Prozessoren $\Psi = 4,36$ dB und ist somit gering. Der maximale Fehler im Frequenzbereich beträgt 26,4 dB. Der geringe mittlere Fehler wird hier vor allem aufgrund des umfangreichen Einsatzes des Referenzmodells ermöglicht. Die Rechenzeiterparnis beträgt bei paralleler Berechnung auf vier Prozessoren 11 %. Bei Verwendung von einem Prozessor beträgt die Rechenzeiterparnis 5 %. Der mittlere Fehler wird auf $\Psi = 0,28$ dB, der maximale Fehler auf 10,59 dB reduziert. Der Grund für die Reduktionen des Fehlers und der Rechenzeiterparnis bei Verwendung von einem Prozessor liegt in den veränderten Einsatzbereichen der eingesetzten Modelle. Durch die Verwendung von nur einem Prozessor weichen die für die verschiedenen Modelle ermittelten Kosten θ_q von den Kosten bei Verwendung von vier Prozessoren ab. Dies führt zu einer veränderten Anzahl an Testpunkten und Frequenzgruppen. Die Verwendung anderer

Testpunkte führt in diesem Beispiel dazu, dass das vereinfachte Modell VM 2 nicht eingesetzt wird, das Modell VM 1 wird bis zu einer Frequenz von 348 Hz verwendet. Die Verwendung des höherwertigen und rechenaufwändigeren Modells in einem größeren Frequenzbereich führt insgesamt zu einer geringeren Rechenzeiterparnis, aber ebenfalls zu einem verringerten Fehler. Darüber hinaus zeigt dieses Ergebnis die grundsätzliche Eigenschaft des Verfahrens, dass mit zunehmendem Fehler die Rechenzeiterparnis zunimmt. Dieses Verhalten wird in Abschnitt 4.4.4 ausführlich untersucht.

Berechnung des Schalldrucks in einem Impedanzrohr

Als Beispiel für die Variation des numerischen Modells durch Variation der Diskretisierung wird für eine Berechnung einer Luftschall-Fragestellung ein generisches Impedanzrohr modelliert. Ein Impedanzrohr, oder auch Kundt'sches Rohr, ist ein luftgefülltes Rohr, das zur Messung der akustischen Impedanz einer Probe unter ebenem Schalleinfall genutzt werden kann. Ein Ende des Rohrs ist mit einem Lautsprecher verschlossen. Das andere Rohrende besitzt einen schallharten Abschluss. Vor dem Abschluss wird die zu untersuchende Probe montiert. Für das folgende Beispiel wird das Impedanzrohr als zylindrisches Luftvolumen mit einer Länge von einem Meter und einem Durchmesser von 0,03 m modelliert. Die Modellierung des Lautsprechers erfolgt als harmonischer Schallfluss durch Vorgabe der Schallschnelle am linken Rand des Luftvolumens. Am rechten Rohrende wird ein poröses Material durch Vorgabe einer frequenzabhängigen Impedanz Z^{Rand} modelliert. Das Modell ist schematisch in Abbildung 4.4 dargestellt. Als zu berechnende Ergebnisgröße wird der Schalldruck in der mit X markierten Mittelebene des Rohrs verwendet. Die Materialparameter, Diskretisierung und Einstellungen des Multi-Modell-Verfahrens sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst.

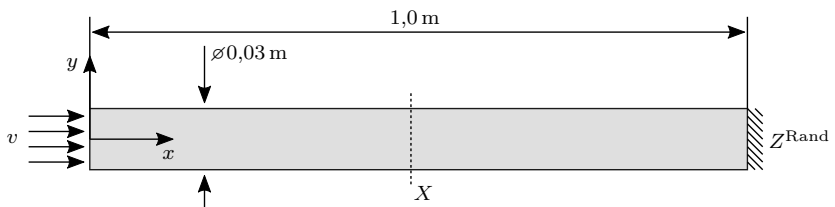


Abbildung 4.4.: Geometrie des Impedanzrohrs zur Variation des numerischen Modells durch Variation der Diskretisierung. Alle Querschnitte rotationssymmetrisch. Anregung am linken Rohrende mit harmonischem Schallfluss, Berechnung des Schalldruckpegels in der Ebene X . Impedanz des porösen Materials als Randbedingung am rechten Rohrende.

Das Modell wird mit 27-Knoten Hexaeder-Elementen diskretisiert. Die Elemente verwenden quadratische Ansatzfunktionen. Es wird die HELMHOLTZ-Gleichung (2.18)

gelöst. Die Diskretisierung des Referenzmodells wird anhand der höchsten zu berechnenden Frequenz von 6.400 Hz festgelegt. Mit der Schallgeschwindigkeit von 340 m/s beträgt die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{6.400 \text{ Hz}} = 0,053 \text{ m} \quad . \quad (4.3)$$

Analog zu den Überlegungen im vorherigen Abschnitt wird die Elementkantenlänge des Referenzmodells zu $\beta^{\text{Ref}} = 0,01 \text{ m}$ festgelegt. Dadurch ist eine Diskretisierung mit mehr als zehn Knoten je Wellenlänge bei der höchsten, berechneten Frequenz sichergestellt. Als vereinfachte Modelle kommen zwei Diskretisierungen mit Elementkantenlängen von $\beta^{\text{VM } 1} = 0,015 \text{ m}$ bzw. $\beta^{\text{VM } 2} = 0,05 \text{ m}$ zur Anwendung. Für eine Diskretisierung von zehn Knoten je Wellenlänge sind die vereinfachten Modelle bis zu einer Frequenz von 5.037 Hz (VM 1) bzw. 1.511 Hz (VM 2) anwendbar.

Tabelle 4.4.: Modellparameter des Impedanzrohres und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des numerischen Modells

Materialdaten		Diskretisierung (Referenzmodell)	
Schallgeschwindigkeit	$c = 340 \text{ m/s}$	Elementkantenlänge	$\beta = 0,01 \text{ m}$
Dichte	$\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$	Elementtyp	27-Knoten Hexaeder
		Ansatzfunktion	quadratisch
		Anzahl FHG	13.467
		Randbedingungen / Lasten	
		Randbedingung	Impedanz Z^{Rand} , (frequenzabhängig)
		Last	Schnelle am Rand, $v^{\text{Rand}'} = 1 \text{ m/s}$
Parameter des Multi-Modell-Verfahrens			
Validierungskriterium	einfache Pegeldifferenz		
Zulässiger Fehler	1,5 dB		
Vereinfachte Modelle (Anzahl)	2		
Vereinfachte Modelle (Art)	Variation der Diskretisierung		
Ergebnisgröße	Mittlerer Schalldruck in der Ebene X		
Frequenzbereich	900 – 6.400 Hz		
Anzahl Frequenzstützstellen	541		
Frequenzauflösung	10 Hz		

Als Materialmodell für die zu modellierende Luft wird homogenes, isotropes Fluid verwendet. Es wird keine Dämpfung berücksichtigt. Das Materialmodell erfordert die Vorgabe der Schallgeschwindigkeit und der Dichte des Fluids. Für dieses Berechnungsbeispiel wird eine Schallgeschwindigkeit $c = 340 \text{ m/s}$ und eine Luftdichte $\rho =$

1,225 kg/m³ verwendet. Die Impedanzrandbedingung am rechten Rohrende modelliert einen porösen Absorber. Dazu wird die Impedanz frequenzabhängig nach Real- und Imaginärteil vorgegeben. Verwendet werden die Daten der in Abbildung A.2 gezeigten Messungen für eine Probe aus porösem Aluminium. Die Impedanz wird dazu im Vorfeld mit dem Zwei-Mikrofon-Verfahren gemäß [46] im Impedanzrohr gemessen. Die Berechnung wird für den Frequenzbereich von 900 – 6.400 Hz mit insgesamt 541 Frequenzstützstellen durchgeführt. Der Abstand der Frequenzstützstellen beträgt somit 10 Hz. Als Validierungskriterium wird eine absolute Pegeldifferenz von $\Pi^{\text{EPD}} = 1,5 \text{ dB}$ verwendet.

Das bei Verwendung von vier Prozessoren erzielte Berechnungsergebnis ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Die entsprechende Darstellung bei Verwendung von einem Prozessor ist im Anhang in Abbildung C.2 zu finden. Im oberen Teil der Abbildung ist der Schalldruckpegel in der Mitte der Rohrlänge über der Frequenz aufgetragen. Die mit dem Multi-Modell-Verfahren berechnete Systemantwort ist dabei zusätzlich mit Kreuzen markiert. Die mittlere Darstellung zeigt den Fehler der mit dem Multi-Modell-Verfahren berechneten Systemantwort gegenüber dem mit dem Referenzmodell berechneten Ergebnis. Im unteren Teil der Abbildung ist für jede zehnte Frequenzstützstelle das eingesetzte Modell markiert.

Es ist zu erkennen, dass der Verlauf des Schalldruckpegels über der Frequenz sowohl bei der Berechnung ausschließlich mit dem Referenzmodell, als auch unter Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens, sehr ähnlich ist. Dabei wird unterhalb von 2.480 Hz das Modell mit der größten Diskretisierung, VM 2, verwendet. Im Frequenzbereich von 2.480 – 4.040 Hz wird das vereinfachte Modell VM 1 eingesetzt, oberhalb von 4.040 Hz kommt das Referenzmodell zur Anwendung. Grundsätzlich entsprechen diese Einsatzbereiche der Erwartung. Dennoch wird vor allem das Modell VM 2 bis zu einer Frequenz von 2.480 Hz, und damit bei deutlich höheren Frequenzen eingesetzt, als anhand der verwendeten Diskretisierung zu erwarten ist. Demgegenüber wird das Modell VM 1 nicht bis zu der zunächst erwarteten Frequenz von 5.031 Hz eingesetzt. An der Auftragung des Fehlers der Systemantwort im mittleren Diagramm ist der Effekt des Wechsels von einem vereinfachten Modell zum höherwertigen Modell an dem Übergang von VM 2 zu VM 1 (2.480 Hz) gut zu erkennen. Hier nimmt die Abweichung zwischen dem Referenzmodell und dem vereinfachten Modell mit steigender Frequenz zu. Dabei sind Abweichungen ab ca. 2.000 Hz auch anhand der berechneten Systemantwort anhand der Verschiebung der Resonanz zu einer höheren Frequenz erkennbar. Das Verfahren erkennt diese Abweichung und wählt das höherwertige Modell VM 1. Der Fehler wird an diesem Übergang deutlich reduziert. Ein entsprechendes Verhalten ist beim Übergang zwischen dem vereinfachten Modell VM 1 und dem Referenzmodell bei 4.040 Hz zu erkennen. Auch hier steigt der Fehler mit der Frequenz an, beim Wechsel zum Referenzmodell verschwindet der Fehler. Der maximale Fehler der approximierten Systemantwort im Frequenzbereich beträgt bei dieser Untersuchung 1,89 dB.

In Tabelle 4.5 sind die quantitativen Ergebnisgrößen bei Berechnung mit einem und mit vier Prozessoren zu finden. Insgesamt führt die Verwendung der vereinfachten

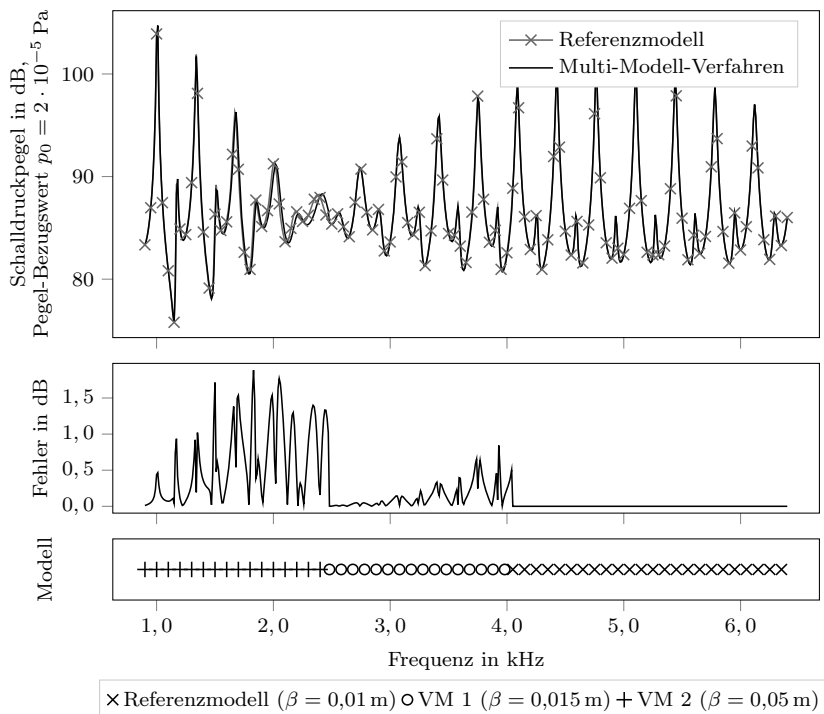


Abbildung 4.5.: Vergleich des berechneten Schalldruckpegels in der mit X markierten Ebene, Berechnung mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der Systemantworten (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation der Diskretisierung.

Modelle gemeinsam mit dem Referenzmodell bei paralleler Berechnung zu einem mittleren Fehler des berechneten Schalldruckpegels von $\Psi = 0,23$ dB und einer Rechenzeitersparnis von 27 %. Bei Ausführung des Verfahrens auf einem Prozessor liegt die Rechenzeitersparnis bei 44 %, der Fehler ändert sich nicht.

In diesem sowie in dem vorherigen Beispiel werden vereinfachte Modelle durch Variation der Elementkantenlänge und damit durch Variation des numerischen Modells erzeugt. Das vorherige Beispiel betrachtet eine Fragestellung aus dem Bereich des Körperschalls, das vorliegende Beispiel untersucht eine Fragestellung für Luftschall. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Beispielen ist in der erzielten Rechenzeitersparnis zu erkennen. Das Beispiel zum Luftschall erreicht mit der selben Anzahl vereinfachter Modelle eine deutlich höhere Rechenzeitersparnis. Die Elementkantenlänge wird für die vereinfachten Modelle in diesem Beispiel vom Referenzmodell

zum Modell mit der größten Diskretisierung (VM 2) vervielfacht. Im vorherigen Beispiel wird die Elementkantenlänge für die größte Diskretisierung gegenüber dem Referenzmodell verdreifacht. Dennoch kann das vereinfachte Modell (VM 2) in diesem Beispiel für fast 39 % des Frequenzbereichs eingesetzt werden, im vorherigen Beispiel wird das entsprechende Modell für 14 % des Frequenzbereichs verwendet. Der Grund dafür ist die Abhängigkeit der aufzulösenden Wellenlänge von der Frequenz. Für das Beispiel aus dem Körperschall ist die Biegewellenlänge umgekehrt proportional zur Wurzel der Frequenz, $\lambda_B \sim 1/\sqrt{f}$, vgl. Gleichung (4.2). Die Wellenlänge der für Luftschall aufzulösenden Longitudinalwellen ist dagegen umgekehrt proportional zur Frequenz, $\lambda_L \sim 1/f$, vgl. Gleichung (4.3). Die relevante Wellenlänge ändert sich hier mit der Frequenz für Luftschall stärker als für Körperschall. Eine äquivalente Variation der Diskretisierung schränkt für durch Biegewellen dominierte Fragestellungen den nutzbaren Frequenzbereich somit stärker ein als für durch Longitudinalwellen dominierte Fragestellungen. Das vorgestellte Multi-Modell-Verfahren ist somit bei Variation der Diskretisierung für solche Fragestellungen geeigneter, bei denen die relevante Wellenlänge umgekehrt proportional zur Frequenz ist. Dies sind alle akustisch relevanten Wellenarten mit Ausnahme der Biegewelle.

Tabelle 4.5.: Vergleich der Rechenzeiterparnis und des mittleren Fehlers mit und ohne Parallelisierung bei Variation des numerischen Modells durch Nutzung größerer Diskretisierungen am Beispiel einer Luftschallberechnung

	Rechenzeiterparnis		Mittlerer Fehler Ψ
Anzahl Prozessoren	1	44 %	0,23 dB
	4	27 %	0,23 dB

4.1.2. Nutzung analytischer Lösungen

Die FEM wird verwendet, um die partiellen Differentialgleichungen des mathematischen Modells in algebraische Gleichungen und damit in das numerische Modell zu überführen. Eine weitere Möglichkeit zur Ableitung vereinfachter numerischer Modelle besteht in der Nutzung alternativer Methoden zur Überführung des mathematischen in das numerische Modell. Im folgenden Beispiel wird als vereinfachtes numerisches Modell eine analytische Lösung verwendet. Als Beispiel wird die Schwingschnelle eines Schwingfundaments berechnet. Ein Schwingfundament ist eine auf weichen Federn gelagerte schwere Platte, auf der beispielsweise empfindliche Experimente aufgebaut werden können. Durch die Lagerung der schweren Platte auf weichen Federn weist das Schwingungssystem eine sehr niedrige erste vertikale Eigenfrequenz auf. Weit oberhalb dieser Eigenfrequenz tritt ein Isolationseffekt mit einer hohen Dämmwirkung ein. Die auf dem Schwingfundament aufgebauten Experimente sind somit gegen eine Schwingungsanregung von außen nahezu vollständig isoliert. Das Modell des modellierten Schwingfundaments ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

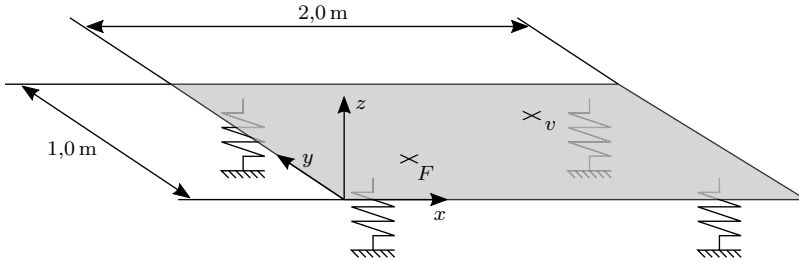


Abbildung 4.6.: Geometrie des Schwingfundaments zur Variation des numerischen Modells. Vereinfachtes Modell modelliert als Einmassenschwinger. Angriffspunkt der Erregerkraft F , Ort der Auswertung des Schwingschnelle v . Feder-Fußpunkte eingespannt.

Das Schwingfundament wird als ebene Platte in der x-y-Ebene modelliert. Die Parameter der Modellierung sind in Tabelle 4.6 zusammengefasst. Die Platte ist in z-Richtung auf vier Federn gelagert. Als Randbedingung wird eine Einspannung der Fußpunkte der Federn verwendet. Die Anregung erfolgt durch eine harmonische Punktkraft in z-Richtung von 1 N an dem mit einem F markierten Ort (0,6/0,4) m. Die Schwingschnelle des Schwingfundaments wird an dem mit einem v markierten Ort (1,6/0,6) m in z-Richtung berechnet. Die Dicke des Schwingfundaments beträgt $d = 0,1$ m. Das Material ist Stahl mit einem E-Modul von $E = 210 \cdot 10^9$ N/m² und einer Dichte von $\rho = 7.850$ kg/m³. Die Berechnung wird im Frequenzbereich von 1 – 10 Hz mit 450 Frequenzstützstellen durchgeführt. Der Abstand der Frequenzstützstellen beträgt somit $\delta f = 0,02$ Hz. Als Validierungskriterium wird eine einfache Pegeldifferenz von $\Pi^{\text{EPD}} = 6,0$ dB verwendet.

In diesem Beispiel wird die Nutzung einer analytischen Lösung als vereinfachtes Modell untersucht. Es wird erwartet, dass sich das in Abbildung 4.6 dargestellte Schwingfundament unterhalb der ersten Biegeeigenfrequenz wie ein starrer Körper verhält. Der starre Körper führt unterhalb der ersten vertikalen Eigenfrequenz nur vertikale Schwingungen auf den Federn aus. Die Schwingschnelle ist somit an allen Orten der Platte identisch. Das Schwingungssystem lässt sich somit unterhalb der ersten Biegeeigenfrequenz der Platte angenähert als punktförmiger Einmassenschwinger modellieren. Für diesen Fall kann die frequenzabhängige Schwingschnelle $v(\Omega)$ mittels Gleichung (4.4) berechnet werden. Darin sind Ω die Anregungsfrequenz, F ist die Amplitude der Erregerkraft, ζ ist die Federsteifigkeit und η ist der Verlustfaktor. Die Masse des starren Körpers ist m_{Platte} .

$$v(\Omega) = \frac{j \Omega F}{\zeta \cdot \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\zeta}{m_{\text{Platte}}}}} \right)^2 + 2 j \eta \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\zeta}{m_{\text{Platte}}}}} \right)^2} \quad (4.4)$$

Für die Modellierung der Plattengeometrie verwendet das Referenzmodell Schalenelemente mit der Plattenformulierung nach MINDLIN und quadratische Ansatzfunktionen. Die Elementkantenlänge beträgt $\beta^{\text{Ref}} = 0,2\text{ m}$. Für eine Diskretisierung von zehn Knoten je Biegewellenlänge wäre das so erzeugte numerische Modell bis zu einer Frequenz von 1.214 Hz verwendbar. Für das vorliegende Beispiel ist die verwendete Elementkantenlänge von untergeordneter Bedeutung, da die Untersuchung auf den Einsatz der analytischen Formulierung in Gleichung (4.4) zur Berechnung der ersten vertikalen Eigenfrequenz des Schwingungssystems abzielt. Die Federn werden als eindimensionale Feder- und Dämpferelemente mit einer Steifigkeit von jeweils $\zeta^{\text{Ref}} = 134.000\text{ N/m}$ und einem Verlustfaktor von 0,001 modelliert.

Tabelle 4.6.: Modellparameter des Schwingfundaments und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des numerischen Modells

Materialdaten		Diskretisierung (Referenzmodell)	
E-Modul	$E = 210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Elementkantenlänge	$\beta = 0,2 \text{ m}$
Dichte	$\rho = 7.850 \text{ kg/m}^3$	Elementtyp	9-Knoten Schalen
Poisson-Zahl	$\nu = 0,3$	Ansatzfunktion	quadratisch
Bauteildicke	$d = 0,1 \text{ m}$	Anzahl FHG	1.386
Federsteifigkeit	$\zeta^{\text{Ref}} = 134.000 \text{ N/m}$	Randbedingungen / Lasten	
Verlustfaktor Federn	$\eta = 0,001$	Randbedingung	eingespannt (Feder-Fußpunkte)
		Last	Punktkraft, $F' = 1 \text{ N}$
Parameter Multi-Modell Verfahren			
Validierungskriterium		einfache Pegeldifferenz	
Zulässiger Fehler		6,0 dB	
Vereinfachte Modelle (Anzahl)		1	
Vereinfachte Modelle (Art)		Analytische Formulierung (als Einmassenschwinger)	
Ergebnisgröße		Schwingschnelle in z-Richtung (Ort: (1,6/0,6) m)	
Frequenzbereich		1 – 10 Hz	
Anzahl Frequenzstützstellen		450	
Frequenzauflösung		0,02 Hz	

Das vereinfachte Modell idealisiert das Schwingfundament als Einmassenschwinger. Dazu wird die Masse der Platte entsprechend der genannten Abmessungen und der Dichte mit $m_{\text{Platte}} = 1.570\text{ kg}$ verwendet. Die Federsteifigkeit berechnet sich aus den für das Referenzmodell verwendeten Federsteifigkeiten zu $\zeta^{\text{VM}} = 536.000\text{ N/m}$. Dabei wird die Parallelschaltung der vier Federn des Referenzmodells zu einer Feder kombiniert. Die erste vertikale Eigenfrequenz ergibt sich somit zu 2,94 Hz.

Das Berechnungsergebnis bei paralleler Berechnung auf vier Prozessoren ist in Abbildung 4.7 dargestellt, in Abbildung C.3 im Anhang ist die entsprechende Darstellung für die Berechnung auf einem Prozessor zu finden. Im oberen Teil des Diagramms ist der Pegel der Schwingschnelle des Schwingfundaments in z-Richtung über der Frequenz, bei Berechnung nur mit dem Referenzmodell sowie für die Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens, aufgetragen. Der Fehler der approximierten Systemantwort ist im mittleren Diagrammteil dargestellt. Im unteren Teil des Diagramms ist für jede Frequenzstützstelle das verwendete Modell markiert. Der Übersichtlichkeit halber erhält hier nur jede zehnte Frequenzstützstelle eine Markierung.

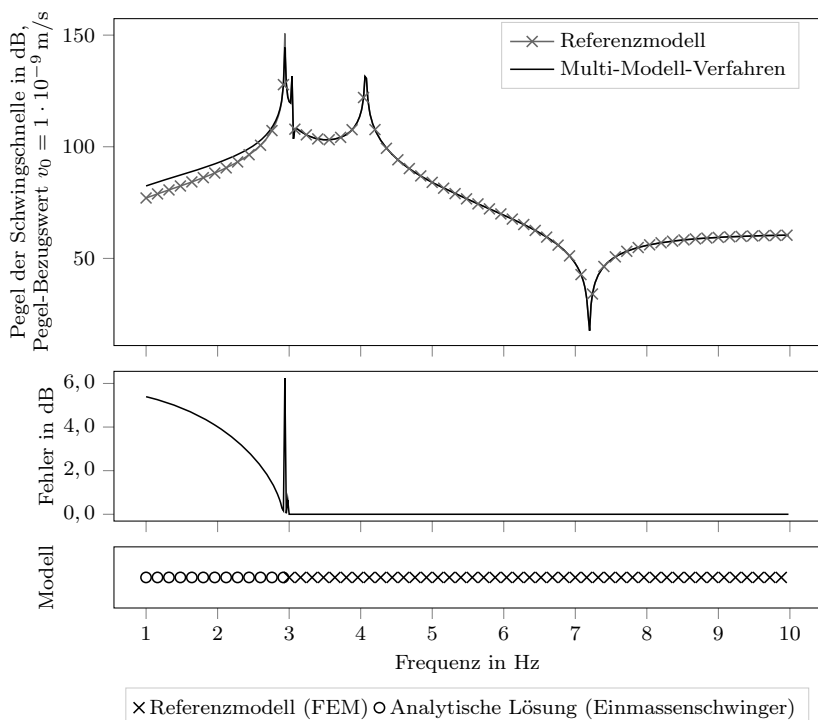


Abbildung 4.7.: Vergleich der berechneten Schwingschnelle des Schwingfundaments an dem mit v markierten Ort mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der Systemantworten (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Nutzung einer analytischen Lösung.

Das vereinfachte Modell wird bis zur ersten Resonanzstelle bei 2,98 Hz eingesetzt, dies ist näherungsweise die erste vertikale Eigenfrequenz. Oberhalb der ersten Resonanzstelle besitzt das Referenzmodell im betrachteten Frequenzbereich zwei weitere

Tabelle 4.7.: Vergleich der Rechenzeiterparnis und des mittleren Fehlers mit und ohne Parallelisierung bei Variation des numerischen Modells durch Nutzung einer analytischen Lösung

Anzahl Prozessoren	Rechenzeiterparnis		Mittlerer Fehler Ψ
	1	23 %	1,22 dB
	4	7 %	1,22 dB

Resonanzstellen. Diese Resonanzen sind Kippschwingungen des Schwingfundaments um die x-Achse bei 3,04 Hz und um die y-Achse bei 4,06 Hz. Das als Einmassenschwinger idealisierte, vereinfachte Modell besitzt als Einfreiheitsgrad-System nur eine Eigenfrequenz. Das Verfahren erkennt dies und verwendet das vereinfachte Modell nur bis zur ersten Resonanz, welche durch das Modell abgebildet werden kann. Für alle verbleibenden Frequenzstützstellen wird das Referenzmodell verwendet. Abweichungen der berechneten Systemantworten treten vor allem weit unterhalb der ersten Eigenfrequenz auf. Der maximale Fehler beträgt für diese Untersuchung 6,24 dB und wird nur in der Nähe der Resonanzstelle erreicht.

Die Übersicht der quantitativen Vergleichsgrößen für die Berechnung mit einem und vier Prozessoren ist in Tabelle 4.7 dargestellt. Bei Verwendung von vier Prozessoren zur Lösung wird eine Rechenzeiterparnis von 7 % erzielt, der Fehler ist mit $\Psi = 1,22$ dB insgesamt gering. Die Aufteilung der zur Verfügung stehenden Modelle auf den Frequenzbereich ist bei Verwendung von einem Prozessor identisch, somit ändert sich der resultierende Fehler nicht. Demgegenüber erhöht sich die erzielte Rechenzeiterparnis. Ein wesentlicher Grund hierfür ist die Nutzung der analytischen Lösung für das vereinfachte Modell. Die dazu erforderlichen Berechnungen sind nicht parallelisierbar und die erforderliche Rechenzeit zu Lösung ist im Vergleich zu der für die Lösung des Referenzmodells erforderlichen Zeit sehr gering. Die zur Berechnung des vereinfachten Modells erforderliche Rechenzeit ändert sich somit bei Parallelisierung des Verfahrens nicht. Durch die Verwendung von vier Prozessoren wird nur die Auswertung des Referenzmodells beschleunigt. Dadurch wird die Rechenzeiterparnis insgesamt reduziert. Die Gründe für den insgesamt geringen Fehler der Berechnung sind einerseits der eher kleine Anteil des Frequenzbereichs in dem das vereinfachte Modell eingesetzt wird. Andererseits sind die Abweichungen der Systemantworten der verwendeten Modelle vor allem in den Bereichen groß, in denen der Pegel der Schwingschnelle insgesamt klein ist. Aufgrund der bei der Berechnung des Fehlermaßes in Gleichung (4.1) verwendeten Pegelmitteilung haben Abweichungen bei geringen Amplituden geringere Auswirkungen auf den Fehler als Abweichungen bei hohen Amplituden. Dies erscheint auch aus akustischer Sicht sinnvoll, da in vielen Anwendungsfällen vor allem eine genaue Prognose von Resonanzstellen erforderlich ist, während Frequenzbereiche mit geringer Amplitude häufig von untergeordnetem Interesse sind.

4.2. Variation des mathematischen Modells

Neben der Variation des numerischen Modells besteht eine Möglichkeit zur Ableitung vereinfachter Modelle in der Variation des mathematischen Modells. Das mathematische Modell wird durch die Festlegung der zu lösenden partiellen Differentialgleichungen definiert. In diesem Abschnitt werden zwei Ansätze zur Nutzung vereinfachter mathematischer Modelle gemeinsam mit einem Referenzmodell untersucht. In Abschnitt 4.2.1 wird eine schwingende Platte mittels Volumenelementen diskretisiert, das vereinfachte Modell verwendet Plattenelemente. Die mit den Volumenelementen beschriebenen Differentialgleichungen werden direkt aus den Kontinuumsmechanischen Grundgleichungen abgeleitet. Sie sind daher in der Lage beliebige Verformungen der Platte zu berücksichtigen. Die Plattenelemente berücksichtigen nur die für die Durchbiegung der Platte relevanten Differentialgleichungen. Sie sind nur für durch Biegung dominierte Fragestellungen geeignet. Demgegenüber lassen sich die Elemente als zweidimensionale Strukturen beschreiben, dadurch wird der erforderliche Berechnungsaufwand gegenüber den Volumenelementen reduziert. In Abschnitt 4.2.2 wird am Beispiel eines Schalldämpfers mit porösem Material die Diskretisierung beibehalten. Variiert wird das für die Beschreibung des porösen Materials verwendete Materialmodell. Für das Referenzmodell wird das BIOT-Modell verwendet. Dieses Materialmodell berücksichtigt drei Wellentypen innerhalb des porösen Materials und erfordert Elemente mit vier FHG je Knoten. Als alternatives Materialmodell wird ein äquivalentes Fluid verwendet. Dieses Modell berücksichtigt nur einen Wellentyp, die zugehörigen Elemente besitzen nur einen FHG je Knoten. Somit wird durch Vereinfachung des mathematischen Modells eine Reduktion des Berechnungsaufwands des resultierenden numerischen Modells erzielt.

4.2.1. Variation der Elementformulierung

Im folgenden Abschnitt wird die Ableitung vereinfachter mathematischer Modelle durch Variation der verwendeten Elementformulierung untersucht. Dazu wird am Beispiel einer Platte unter Beibehaltung der Elementkantenlänge das Referenzmodell mit Volumenelementen diskretisiert. Volumenelemente verwenden die Kontinuumsmechanischen Grundgleichungen und sind in der Lage, beliebige Verformungen und Spannungszustände abzubilden. Die in diesem Beispiel modellierte Platte führt vor allem Biegeschwingungen aus. Daher kann, unter der Annahme einer konstanten Spannung in Dickenrichtung der Platte, das Problem als zweidimensional betrachtet werden. Für das vereinfachte Modell werden daher Plattenelemente verwendet. Plattenelemente modellieren nur die als klein gegen die Plattenabmessungen angenommene Durchbiegung der Platte senkrecht zur Plattenfläche. Weitere Annahmen der den Plattenelementen zugrundeliegenden Plattentheorien werden beispielsweise in [1, 16, 82] angegeben. Durch diese Reduktion von dreidimensionalen Volumenelementen auf zweidimensionale Plattenelemente und damit die Reduktion der be-

rücksichtigten Differentialgleichungen wird der Berechnungsaufwand zur Lösung der entstehenden numerischen Modelle reduziert.

Kopplung von Volumenelementen und Plattenelementen

In diesem Beispiel wird die Schwingschnelle einer Aluminiumplatte bei Anregung durch eine Punktkraft berechnet. Als Randbedingung wird an allen Kanten der Platte eine momentenfrei-gestützte Lagerung verwendet. Die Geometrie der Platte ist in Abbildung 4.8 dargestellt, die Parameter der Modellierung sind in Tabelle 4.8 zusammengefasst. Die harmonische Punktkraft greift an dem mit einem F markierten Ort $(0,15/0,15)$ m an und wirkt in Richtung der z -Achse mit einer Amplitude von $F = 1$ N. Die sich einstellende Schwingschnelle wird an dem mit einem v markierten Ort $(0,35/0,25)$ m berechnet. Die Lösung wird für den Frequenzbereich von $2 - 1.000$ Hz mit 500 Frequenzstützstellen berechnet. Der Abstand der Frequenzstützstellen beträgt $\delta f = 2$ Hz. Das Material der Platte ist Aluminium mit einem E-Modul von $E = 70 \cdot 10^9$ N/m² und einer Dichte von $\rho = 2.700$ kg/m³. Die Poisson-Zahl ist $\nu = 0,34$. Dämpfung wird nicht berücksichtigt.

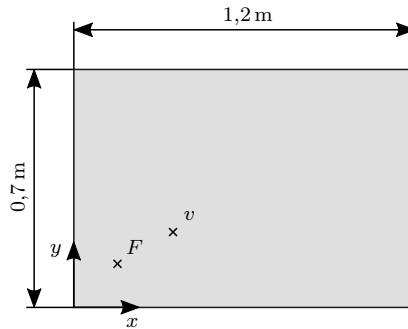


Abbildung 4.8.: Geometrie der zu berechnenden Platte zur Variation des mathematischen Modells durch Variation der Elementformulierung. Ort der Anregungskraft F , Ort der Auswertung der Schwingschnelle v . Alle Kanten momentenfrei-gestützt.

Die Plattengeometrie wird für das Referenzmodell mit Hexaeder-Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert. Das vereinfachte Modell verwendet Plattenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen mit der Plattentheorie von MINDLIN. Die Elementkantenlänge beträgt für beide Modelle $\beta = 0,15$ m. Damit ist eine Diskretisierung von zehn Knoten je Biegewellenlänge für eine Frequenz von 1.000 Hz sichergestellt. Für beide Modelle beträgt die Anzahl der Elemente somit 336. Dabei verwendet das Referenzmodell aufgrund der Diskretisierung mit Volumenelementen 12.789 FHG, das vereinfachte Modell besitzt 4.263 FHG. Als Validierungskriterium wird eine mittlere Pegeldifferenz mit einem tolerierten Fehler von $\Pi^{\text{MPD}} = 3,0$ dB verwendet.

Tabelle 4.8.: Modellparameter der Platte und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des mathematischen Modells

Materialdaten		Diskretisierung (Referenzmodell)	
E-Modul	$E = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Elementkantenlänge	$\beta = 0,15 \text{ m}$
Dichte	$\rho = 2.700 \text{ kg/m}^3$	Elementtyp	27-Knoten Hexaeder
Poisson-Zahl	$\nu = 0,34$	Ansatzfunktion	quadratisch
Plattendicke	$d = 0,005 \text{ m}$	Anzahl FHG	12.789
Randbedingungen / Lasten			
		Randbedingung	momentenfrei-gestützt
		Last	Punktkraft, $F' = 1 \text{ N}$
Parameter Multi-Modell Verfahren			
Validierungskriterium		mittlere Pegeldifferenz	
Zulässiger Fehler		3,0 dB	
Vereinfachte Modelle (Anzahl)		1	
Vereinfachte Modelle (Art)		Variation des Elementtyps	
Ergebnisgröße		Schwingschnelle in z-Richtung (Ort: (0,35/0,25) m)	
Frequenzbereich		2 – 1.000 Hz	
Anzahl Frequenzstützstellen		500	
Frequenzauflösung		2 Hz	

Das Berechnungsergebnis ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Die Darstellung des Berechnungsergebnisses unter Verwendung von einem Prozessor ist in Abbildung C.4 im Anhang zu finden. Analog zu den bisherigen Darstellungen ist im oberen Diagramm der Pegel der Schwingschnelle für den Fall der Berechnung ausschließlich mit dem Referenzmodell sowie bei Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens über der Frequenz dargestellt. Die mittlere Darstellung zeigt den Fehler der mit dem Multi-Modell-Verfahren berechneten Systemantwort im Vergleich zu dem mit dem Referenzmodell erzielten Berechnungsergebnis. Im unteren Diagramm ist für jede berechnete Frequenzstützstelle das verwendete Modell markiert. Dabei wird der Übersichtlichkeit halber nur jede zehnte Frequenzstützstelle markiert. Optisch ist nahezu kein Unterschied der berechneten Systemantworten erkennbar. Die Auftragung des Fehlers der approximierten Systemantwort zeigt in einigen schmalen Frequenzbereichen vergleichsweise große Abweichungen. Der maximale Fehler im gesamten Frequenzbereich beträgt 26,51 dB. Anhand des unteren Diagramms ist zu erkennen, dass das vereinfachte Modell im Frequenzbereich bis 202 Hz verwendet wird. Für alle Frequenzstützstellen oberhalb dieser Grenze wird das Referenzmodell verwendet.

Die Vergleichsgrößen zum resultierenden Fehler und der Rechenzeiterparnis sind in Tabelle 4.9 dargestellt. Auch in diesem Beispiel resultiert ein im Mittel geringer Fehler von $\Psi = 3,39 \text{ dB}$ aus der Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens. Der in schmalen Frequenzbereichen große maximale Fehler ist das Resultat leicht verschob-

bener Resonanzstellen des vereinfachten Modells gegenüber dem Referenzmodell. In der Nähe der Resonanzen besitzt der Frequenzgang große Gradienten, geringfügig verschobene Resonanzstellen führen daher schnell zu großen Abweichungen der Systemantwort. Der Fehler ist, aufgrund der identischen Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle, unabhängig von der Anzahl der verwendeten Prozessoren. Aufgrund der Verwendung des vereinfachten Modells in einem vergleichsweise kleinen Frequenzbereich ist auch die Rechenzeiterparnis von 9 % bei paralleler Berechnung auf vier Prozessoren eher gering. Wird nur ein Prozessor zur Berechnung aller Frequenzstützstellen verwendet, so wird eine Rechenzeiterparnis von 15 % erreicht.

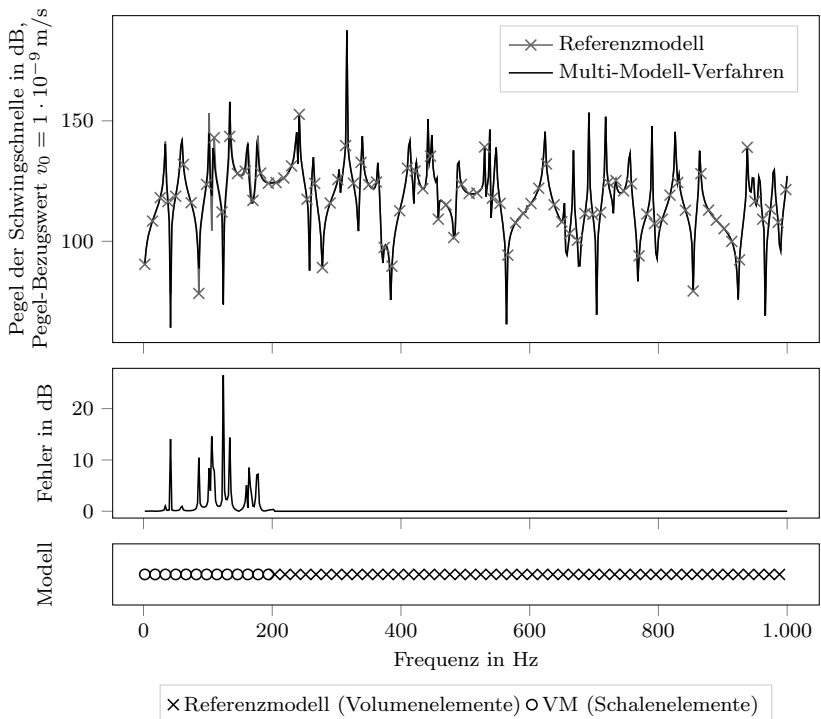


Abbildung 4.9.: Vergleich der berechneten Schwingsschnelle an dem mit v markierten Ort mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens mit einem vereinfachten Modell (oben), Abweichung der Systemantwort (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des mathematischen Modells.

Die Reduktion der Rechenzeiterparnis bei Parallelisierung des Verfahrens wird hier analog zu den vorherigen Beispielen, der Berechnung des Impedanzrohres und des Schwingfundaments, beobachtet. Der Grund für die Reduktion der Rechen-

zeitersparnis liegt in der Konstruktion der Modell-Management-Strategie. In Gleichung (3.26) wird die Rechenzeitersparnis χ eingeführt. Das vorgestellte Verfahren ist so konstruiert, dass unter Nutzung der vorab geschätzten Anteile der zur Verfügung stehenden Modelle an der Gesamtlösung und ohne Ausnutzung von Abbruchkriterien die Ersparnis minimal wird, aber gerade positiv bleibt. Die Ersparnis χ hängt linear von der Anzahl der zu berechnenden Frequenzstützstellen n_f^{ges} ab, $\chi \sim n_f^{\text{ges}}$, vgl. Gleichung (3.26). Die erzielbare Ersparnis für eine gegebene Berechnungsaufgabe nimmt somit betragsmäßig mit steigender Anzahl Frequenzstützstellen zu. Die hier verwendete Parallelisierung durch die Verteilung der Berechnungen für einzelne Frequenzstützstellen auf einzelne Prozessoren reduziert die Anzahl der mit jedem Prozessor zu berechnenden Frequenzstützstellen. Somit reduziert die parallele Verwendung vieler Prozessoren die erzielbare Rechenzeitersparnis. Dieser Zusammenhang gilt exakt allerdings nur dann, wenn die Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle und somit der insgesamt resultierende Fehler unverändert bleiben. Darüber hinaus ist die tatsächlich erzielte Rechenzeitersparnis eine Zufallsvariable und damit unsicherheitsbehaftet. Auf diese Eigenschaft wird in Abschnitt 4.4.2 ausführlich eingegangen. Somit kann die Reduktion der Rechenzeitersparnis bei Parallelisierung der Berechnung grundsätzlich erwartet, aber nicht eindeutig quantifiziert werden.

Tabelle 4.9.: Vergleich der Rechenzeitersparnis und des mittleren Fehlers mit und ohne Parallelisierung bei Variation des mathematischen Modells durch Nutzung alternativer finiter Elemente

	Rechenzeitersparnis		Mittlerer Fehler Ψ
	1	15 %	3,39 dB
Anzahl Prozessoren	4	9 %	3,39 dB

Zusätzliche Verwendung einer analytischen Formulierung

Im vorherigen Abschnitt wird die Plattentheorie von MINDLIN für das vereinfachte Model verwendet. Für die Berechnung der Schwingschnelle in einem Punkt der in Abbildung 4.8 gezeigten Platte existiert für den Fall der momentenfrei gelagerten Kanten eine analytische Lösung. Diese Lösung verwendet die Plattentheorie nach KIRCHHOFF und vernachlässigt, analog zur Balkentheorie nach BERNOULLI, den Einfluss der Schubspannung. Die Gleichung (4.5), entnommen aus [77, S. 77], zeigt die analytische Lösung für eine Platte in der x-y-Ebene. In Gleichung (4.5) ist F die Amplitude der harmonischen Erregerkraft mit der Erregerkreisfrequenz Ω , l_x und l_y sind die Plattenabmessungen in x- und y-Richtung, die Plattendicke ist d . Die Koordinaten $(\tilde{x}_v, \tilde{y}_v)$ definieren den Ort, für den die Schwingschnelle berechnet wird. Die Erregerkraft greift in dem durch die Koordinaten $(\tilde{x}_F, \tilde{y}_F)$ festgelegten Ort an. Die Materialparameter E-Modul und Dichte werden durch die Größen E und ρ

berücksichtigt, die Materialdämpfung geht durch den Parameter η ein. Das Schwingverhalten der Platte ergibt sich durch Superposition der Eigenfunktionen der Platte, berücksichtigt durch die $\sin(\dots)$ -Terme. Die Größen a und b sind die Ordnungszahlen der berücksichtigten Eigenfunktionen der Platte in x- bzw. y-Richtung.

$$v(\Omega, (\check{x}_v, \check{y}_v)) = \frac{4 F \Omega}{\rho l_x l_y d} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a \pi \check{x}_v}{l_x}\right) \sin\left(\frac{b \pi \check{y}_v}{l_y}\right) \sin\left(\frac{a \pi \check{x}_v}{l_x}\right) \sin\left(\frac{b \pi \check{y}_v}{l_y}\right) \cdot \frac{\omega_{a,b}^2 - \Omega^2 - j \eta \omega_{a,b}^2}{\left(\omega_{a,b}^2 - \Omega^2\right)^2 + \eta^2 \omega_{a,b}^2} \quad (4.5)$$

mit

$$\omega_{a,b} = \pi^2 \left[\left(\frac{a}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{b}{l_y}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{E d^2}{12(1-\nu^2)\rho}}$$

In diesem Beispiel wird die vorhergehende Untersuchung um ein weiteres, vereinfachtes Modell erweitert. Dazu wird als vereinfachtes Modell die Schwingschnelle an dem in Abbildung 4.8 mit einem v markierten Ort anhand von Gleichung (4.5) berechnet. Im vorherigen Beispiel wird, neben dem Referenzmodell, eine Diskretisierung mit Schalenelementen verwendet. Diese Elemente nutzen die Plattentheorie nach MINDLIN. Zusätzlich wird hier, durch Nutzung der Plattentheorie nach KIRCHHOFF und damit durch Vernachlässigung des Einflusses der Schubspannung, eine weitere Reduktion der verwendeten, vereinfachten Modelle durch die Variation des mathematischen Modells erreicht. Aufgrund der Nutzung einer analytischen Lösung handelt es sich zusätzlich um eine Kombination mit der Variation des numerischen Modells. Für die analytische Lösung werden in x- und y-Richtung jeweils fünf Eigenfunktionen verwendet, $\max(a) = \max(b) = 5$. Dieser Wert wird willkürlich gewählt und begrenzt den Einsatzbereich der analytischen Lösung auf höchstens 800 Hz, da keine Eigenfunktionen oberhalb dieser Frequenz berücksichtigt werden. Die Abschätzung der Einsetzbarkeit der Plattentheorie nach KIRCHHOFF in Gleichung (2.13) liefert hier keinen einschränkenden Grenzwert. Danach ist die Plattentheorie nach KIRCHHOFF für die hier untersuchte Platte bis zu einer Frequenz von ca. 60 kHz anwendbar. Für die Berechnung stehen somit drei Modelle zur Verfügung: das mittels Volumenelementen diskretisierte Referenzmodell, ein mittels Plattenelementen diskretisiertes, vereinfachtes Modell VM 1, sowie ein vereinfachtes Modell auf Basis einer analytischen Formulierung, VM 2. Alle anderen Modellierungsaspekte sind identisch zu dem vorherigen Beispiel. Das mittels paralleler Berechnung auf vier Prozessoren erzielte Berechnungsergebnis ist in Abbildung 4.10 dargestellt, in Abbildung C.5 im Anhang ist das Ergebnis bei Verwendung von einem Prozessor zu finden.

Das Berechnungsergebnis ähnelt dem Ergebnis des vorherigen Beispiels. Auch in diesem Fall wird ein vereinfachtes Modell im unteren Frequenzbereich unterhalb 290 Hz eingesetzt. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel wird hier das auf der analytischen

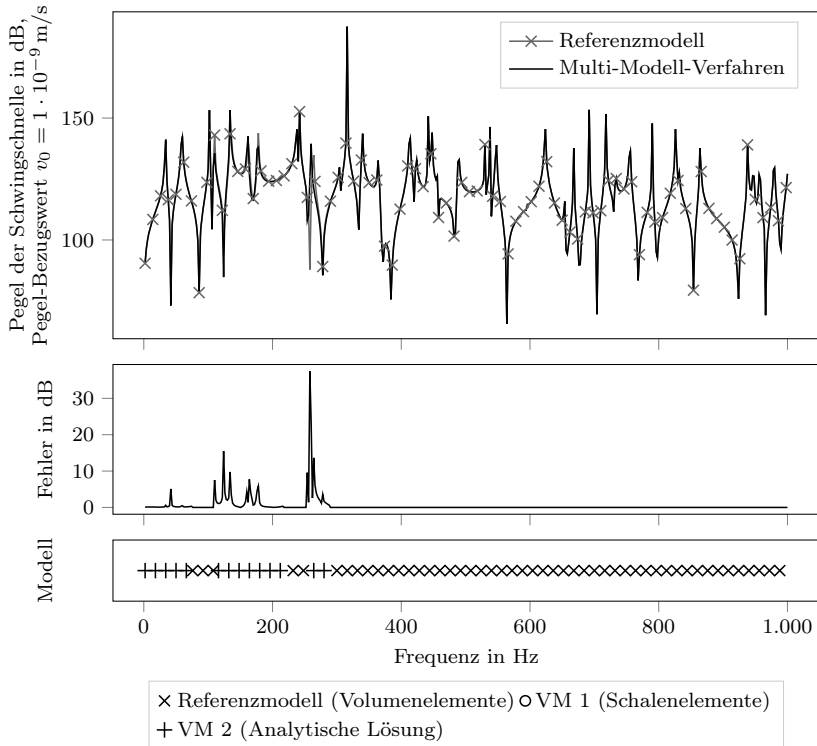


Abbildung 4.10.: Vergleich der berechneten Schwingschnelle an dem mit v markierten Ort mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens mit zwei vereinfachten Modellen (oben), Abweichung der Systemantworten (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des mathematischen Modells.

Lösung basierende, vereinfachte Modell VM 2 verwendet. Der Grund ist, dass die vereinfachten Modelle anhand ihres jeweiligen Berechnungsaufwands aufsteigend geordnet und validiert werden. Zunächst wird hier das Modell VM 2 überprüft, da es den geringsten Berechnungsaufwand erfordert. Der Validierungsprozess ist erfolgreich, das Modell wird in einigen Frequenzgruppen bis zu einer Frequenz von 288 Hz eingesetzt. In den Frequenzgruppen bei höheren Frequenzen ist die Ergebnisqualität des vereinfachten Modells VM 2, aufgrund der Beschränkung der verwendeten Eigenfunktionen, nicht mehr ausreichend. Aber auch das mittels Plattenelementen diskretisierte Modell VM 1 erreicht bei höheren Frequenzen keine ausreichende Ergebnisqualität. Dieses Verhalten ist analog zum vorherigen Beispiel, in dem nur das Modell VM 1 als vereinfachtes Modell verwendet wird. Somit wird oberhalb

von 288 Hz ausschließlich das Referenzmodell verwendet. Eine Übersicht der Vergleichsgrößen Fehler und Rechenzeiterparnis für die Verwendung von einem bzw. vier Prozessoren ist in Tabelle 4.10 dargestellt.

Tabelle 4.10.: Vergleich der Rechenzeiterparnis und des mittleren Fehlers mit und ohne Parallelisierung bei Variation des mathematischen Modells durch Nutzung analytischer Lösungen

Anzahl Prozessoren	Rechenzeiterparnis		Mittlerer Fehler Ψ
	1	9 %	0,32 dB
	4	7 %	11,06 dB

Der maximale Fehler der approximierten Systemantwort beträgt in diesem Beispiel 37,44 dB bei Verwendung von vier Prozessoren und 13,64 dB bei Berechnung auf einem Prozessor. Bemerkenswert ist hier, dass sowohl der maximale als auch der mittlere Fehler bei Verwendung von einem Prozessor deutlich geringer ist ($\Psi = 0,32$ dB) als bei Verwendung von vier Prozessoren ($\Psi = 11,06$ dB). Gleichzeitig ist die Rechenzeiterparnis bei Verwendung von einem Prozessor größer (9 %) als bei Verwendung von vier Prozessoren (7 %). Der Grund für den ansteigenden Fehler ist der größere Einsatzbereich des vereinfachten Modells bei der Berechnung mit vier Prozessoren gegenüber der Berechnung mit einem Prozessor. Bei der Berechnung mit vier Prozessoren wird das vereinfachte Modell für ca. 21 % des Frequenzbereichs verwendet. Bei Berechnung mit einem Prozessor wird das vereinfachte Modell für einen Anteil von ca. 15 % des gesamten Frequenzbereichs verwendet. Dies resultiert in einem geringeren Fehler bei der Berechnung mit einem Prozessor. Die Abnahme der Rechenzeiterparnis erfolgt in diesem Beispiel analog zu dem vorherigen Beispiel und resultiert aus der Abhängigkeit der Ersparnis von der Anzahl der zu berechnenden Frequenzstützstellen. Allerdings wird dieser Effekt durch die deutliche Änderung des Fehlers in den Systemantworten nahezu kompensiert.

4.2.2. Variation des Materialmodells

Eine weitere Möglichkeit zur Ableitung eines vereinfachten mathematischen Modells besteht in der Wahl eines Materialmodells geringerer Komplexität. In diesem Beispiel wird dazu ein Schalldämpfer mit porösem Material betrachtet. Poröses Material findet in der Akustik häufig Anwendung als Absorbermaterial zur Dämpfung von Luftschall. Verwendet wird dazu offenporiges Material, dessen Poren untereinander sowie mit den Grenzflächen der Probe verbunden sind. Dadurch können auf das Material auftreffende Luftschallwellen in das Material eintreten. Innerhalb des Materials ist die Ausbreitung des Luftschalls gedämpft. Der wesentliche Grund für diese Dämpfung liegt in der Reibung der Luft in den Poren des porösen Materials bei Vorliegen einer Kapillarströmung. Poröse Absorber entfalten daher vor allem

dann ihre größte Wirkung, wenn die Schwingschnelle der Luft in den Poren groß ist und die Abmessungen Poren möglichst klein sind [95].

Für die Modellierung des porösen Materials zur Berechnung von Luftschallfeldern mittels der FEM stehen verschiedene Materialmodelle zur Verfügung. Das Materialmodell von BIOT ist das allgemeinste Modell, da es sowohl die Wellenausbreitung in der Fluidphase als auch die elastischen Schwingungen der festen Phase, des so genannten Skeletts, berücksichtigt. Es werden drei Wellentypen modelliert, eine Druckwelle für die Fluidphase sowie je eine, sich in dem Skelett ausbreitende, Druck- und Schubwelle. Für den Fall der Verwendung von Volumenelementen in der FEM-Diskretisierung erfordert dieses Materialmodell, je nach Formulierung, zwischen vier und sechs FHG je Knoten. Die Implementierung mit vier FHG berücksichtigt die Verschiebungen des Skeletts in den drei Raumrichtungen sowie den Druck in der Fluidphase. Diese Formulierung wird im Folgenden für die Berechnung verwendet. Alternativ kann die Schallausbreitung in der Fluidphase mit kinematischen Kopplungsbedingungen zwischen dem Skelett und dem Fluid formuliert werden. Für die FEM-Diskretisierung sind in diesem Fall sechs FHG je Knoten erforderlich, je drei für die Verschiebungen des Skeletts und der Fluidphase. In vielen Fällen können die Skelettschwingungen vernachlässigt werden, beispielsweise für Frequenzbereiche oberhalb der in Gleichung (2.22) eingeführten Phasenentkopplungsfrequenz, oder wenn für das Skelett sehr steife Randbedingungen verwendet werden [4]. Für den Fall der Vernachlässigung der Skelettschwingungen können vereinfachte Modelle abgeleitet werden. Sie modellieren nur die Ausbreitung einer Druckwelle in der Fluidphase. Die Wirkung des Skeletts wird dem Fluid als Ausbreitungsdämpfung zugeschrieben. Diese Modellklasse wird als äquivalentes Fluid bezeichnet. Im Gegensatz zu dem Biot-Modell erfordern die Modelle der äquivalenten Fluide nur einen FHG je Knoten. Dies ist der Druck in der Fluidphase.

In diesem Beispiel wird ein Absorptionsschalldämpfer als Anwendungsfall für eine Modellierung von porösem Material untersucht. Das poröse Material wird für das Referenzmodell mittels des Materialmodells von BIOT modelliert. Zusätzlich wird ein vereinfachtes Modell verwendet. Das vereinfachte Modell verwendet ein äquivalentes Fluid als Materialmodell für das poröse Material. Die Geometrie des Schalldämpfers ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Der Körper ist rotationssymmetrisch. Die Ein- und Austrittsrohre sowie der Kernquerschnitt innerhalb des porösen Materials sind luftgefüllt, hier in weiß dargestellt. Das poröse Material füllt den Hohlzylinder um das innere Rohr, hier in grau dargestellt. Das System wird am linken Rand durch einen harmonischen Schallfluss mit einer Vorgabe der Schallschnelle $v = 1 \text{ m/s}$ angeregt. Als Ergebnisgröße wird der Schalldruck in der mit X bezeichneten Fläche verwendet. Die Daten der Modellierung sind in Tabelle 4.11 zusammengefasst. Die Berechnung wird für den Frequenzbereich von 900 – 6.600 Hz mit 218 Frequenzstützstellen durchgeführt. Der Abstand der Frequenzstützstellen beträgt 30 Hz.

Das rechte Rohrende ist mit einer Impedanzrandbedingung beaufschlagt. Als Impedanz wird für alle Frequenzstützstellen die Luftschallkennimpedanz $Z_0 = \rho_0 c$ (vgl. Gleichung (2.21)) verwendet. Unterhalb der so genannten cut-on Frequenz breiten

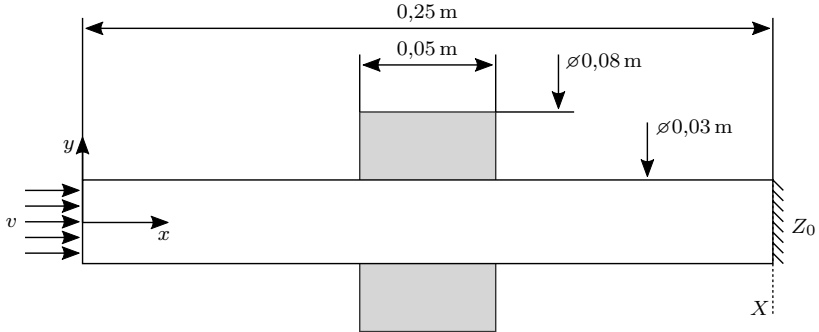


Abbildung 4.11.: Geometrie des Schalldämpfers zur Variation des mathematischen Modells des porösen Materials. Alle Querschnitte rotationssymmetrisch. Luftgefüllte Bereiche sind in weiß, mit porösem Material gefüllte Bereiche in grau markiert. Anregung am linken Rohrende mit harmonischem Schallfluss v , Berechnung des Schalldruckpegels in der Ebene X . Luftschallkennimpedanz Z_0 als Randbedingung am rechten Rohrende.

sich in allseitig berandeten Kanälen nur ebene Wellen aus. Die cut-on Frequenz kann für Rohre mit Kreisquerschnitt nach Gleichung (4.6) berechnet werden. In Gleichung (4.6) ist r_{Rohr} der Radius des Rohrs, c ist die Schallgeschwindigkeit. Der Index '1' der Größe $f_{\text{cut-on}_1}$ zeigt an, dass die Gleichung für die cut-on Frequenz der ersten, nicht ebenen, ausbreitungsfähigen Mode gilt. Für höhere Moden ändert sich der Faktor vor dem Bruch in Gleichung (4.6). [95]

$$f_{\text{cut-on}_1} = 0,59 \frac{c}{2 r_{\text{Rohr}}} \quad (4.6)$$

Für eine Schallgeschwindigkeit $c = 340 \text{ m/s}$ beträgt die cut-on Frequenz für die in Abbildung 4.11 gezeigte Geometrie der Ein- und Austrittsrohre $f_{\text{cut-on}_1} = 6.687 \text{ Hz}$. In diesem Beispiel wird die Systemantwort bis zu einer Frequenz von 6.600 Hz berechnet. In dem Austrittsrohr breiten sich somit nur ebene Wellen aus. Durch die Nutzung der Luftschallkennimpedanz als Impedanzrandbedingung am rechten Rohrende werden somit Reflexionen der auf das Rohrende auftreffenden Schallwellen zurück in den Schalldämpfer vermieden.

Das BIOT-Modell erfordert zur Modellierung porösen Materials insgesamt elf Parameter, darunter die Materialparameter des Skelettmaterials und des Materials der Fluidphase. Die erforderlichen Materialparameter sowie die verwendeten Werte sind in Tabelle 4.11 angegeben. Die Materialparameter des Skeletts sind der E-Modul E , die Dichte ρ_{Skelett} , die Poisson-Zahl ν und der Verlustfaktor η . Für die Charakterisierung des Fluids ist nur die Dichte ρ_0 erforderlich. Die Durchströmung des porösen

Tabelle 4.11.: Modellparameter des Schalldämpfers und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des mathematischen Modells

Materialdaten (Referenzmodell)		Diskretisierung (Referenzmodell)	
E-Modul	$E = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Elementkantenlänge	$\beta = 0,01 \text{ m}$
Dichte	$\rho_{\text{Skelett}} = 2.700 \text{ kg/m}^3$	Elementtyp	27-Knoten
Poisson-Zahl	$\nu = 0,34$		Hexaeder
Verlustfaktor	$\eta = 0,001$	Ansatzfunktion	quadratisch
Luftdichte	$\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$	Anzahl FHG	26.573
Strömungswiderstand	$\Xi = 32.950 \text{ N/(s m}^4\text{)}$	Randbedingungen / Lasten	
Tortuosität ($\lim_{f \rightarrow 0}$)	$\alpha_0 = 3,5785$	Randbedingung	Impedanz Z_0
Tortuosität ($\lim_{f \rightarrow \infty}$)	$\alpha_\infty = 2,3421$		
Porosität	$\phi = 0,609$	Last	Schnelle, $v' = 1 \text{ m/s}$
Viskose char. Länge	$\Lambda_v = 130,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$		
Thermale char. Länge	$\Lambda_t = 123,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$		
Parameter des Multi-Modell-Verfahrens			
Validierungskriterium	einfache Pegeldifferenz		
Zulässiger Fehler	1,5 dB		
Vereinfachte Modelle (Anzahl)	1		
Vereinfachte Modelle (Art)	Variation des Materialmodells		
Ergebnisgröße	Schalldruck in Ebene X		
Frequenzbereich	900 – 6.660 Hz		
Anzahl Frequenzstützstellen	218		
Frequenzauflösung	30 Hz		

Materials wird durch den spezifischen Strömungswiderstand Ξ gekennzeichnet. Diese Größe charakterisiert den Widerstand des porösen Materials gegen eine Durchströmung mit einem Fluid. Der Wert des Strömungswiderstandes hängt wesentlich von der Mikrogeometrie der Poren sowie den Eigenschaften des durchströmenden Fluids ab. Der volumetrische Anteil der Poren an der Probe insgesamt wird durch die Porosität ϕ charakterisiert, die geometrische Struktur der Poren wird durch die Tortuosität beschrieben. Die Tortuosität charakterisiert die Verwundenheit der Poren. Dabei wird zwischen einem Grenzwert der Tortuosität für verschwindende Frequenz α_0 ($\lim_{f \rightarrow 0}$) sowie für sehr hohe Frequenz α_∞ ($\lim_{f \rightarrow \infty}$) unterschieden. Außerdem werden die Werte der viskosen charakteristischen Länge Λ_v und der thermalen charakteristischen Länge Λ_t benötigt. Beide Längen charakterisieren das Verhältnis aus Oberfläche und Volumen der Poren. Die viskose charakteristische Länge gewichtet diese Größen zusätzlich mit der Strömungsgeschwindigkeit in den Poren bei einer stationären Durchströmung des Materials. [4]

Als Material für die Berechnung wird beispielhaft das in [68, 124] vorgestellte, poröse Aluminium PA80-110 (AlSi₇Mg) verwendet. Das Referenzmodell verwendet für die

Modellierung des porösen Materials das BIOT-Modell. Die für die Berechnung mit dem BIOT-Modell verwendeten Daten sind in Tabelle 4.11 angegeben. Die dargestellten Werte werden aus Absorptionsmessungen an dem porösen Material durch inverse Parameteridentifikation ermittelt. Das dazu verwendete Verfahren ist ausführlich im Anhang in Abschnitt A.3 dargestellt. Das vereinfachte Modell verwendet für die Modellierung des porösen Materials ein äquivalentes Fluid. Für die Modellierung als äquivalentes Fluid wird die zu lösende HELMHOLTZ-Gleichung (2.18) nach [131] in eine Darstellung unter Verwendung des komplexen Kompressionsmoduls K_{eq} und der äquivalenten Dichte ρ_{eq} überführt:

$$\Delta p + \frac{\rho_{eq}}{K_{eq}} \omega^2 p = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Die Größen K_{eq} und ρ_{eq} können direkt aus Transmissionsmessungen ermittelt werden, dies ist im Anhang in Abschnitt A.2 dargestellt. Das für das vorliegende Beispiel verwendete Materialmodell erfordert die Vorgabe der äquivalenten Dichte ρ_{eq} und der komplexen Schallgeschwindigkeit c_{eq} . Die komplexe Schallgeschwindigkeit c_{eq} kann aus dem komplexen Kompressionsmodul K_{eq} bestimmt werden, siehe Abschnitt A.2. Die für das poröse Aluminium bestimmten Werte der äquivalenten Dichte und der komplexen Schallgeschwindigkeit sind in Abbildung 4.12 als Real- und Imaginärteil dargestellt.

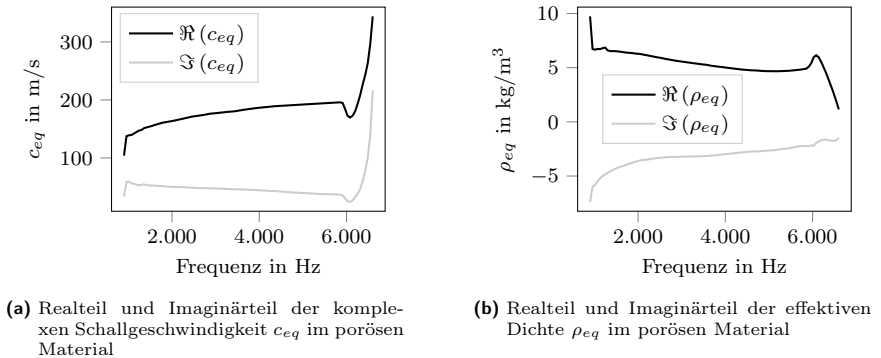


Abbildung 4.12.: Werte der komplexen Schallgeschwindigkeit und der effektiven Dichte für das als äquivalentes Fluid modellierte poröse Material

Die Geometrie des Schalldämpfers wird mittels 27-Knoten Hexaeder-Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert. Die Elementkantenlänge beträgt $\beta = 0,01$ m. Die Diskretisierung ist somit für das Ziel von zehn Knoten je Wellenlänge bis zu einer Frequenz von 7.555 Hz geeignet. Die luftgefüllten Rohre verwenden ein isotropes Materialmodell für ein ungedämpftes Fluid. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c = 340$ m/s, die Dichte der Luft ist $\rho_0 = 1,225$ kg/m³. Das Referenzmodell verwendet insgesamt 26.573 FHG. Aufgrund der geringeren Anzahl der FHG je

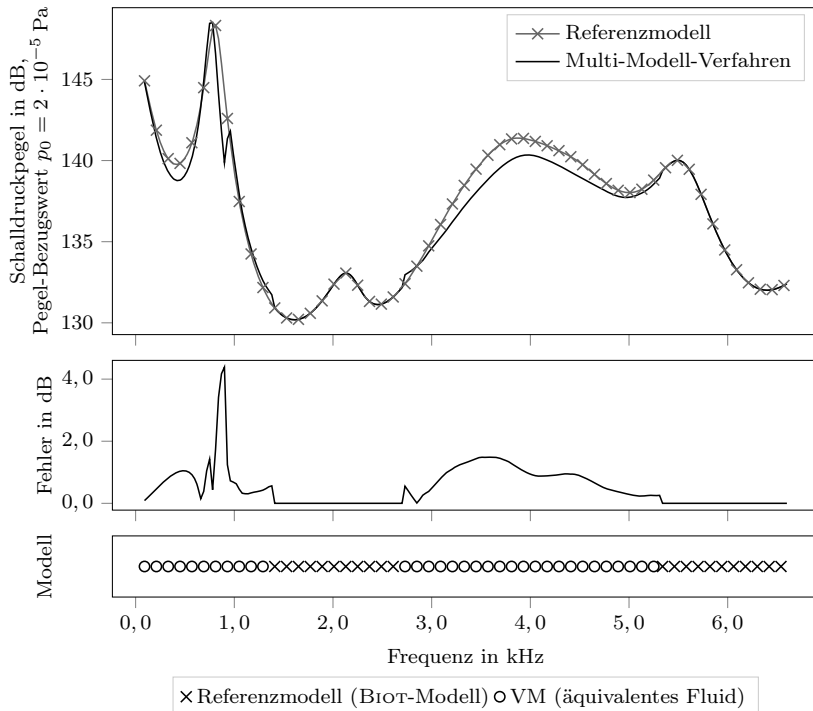


Abbildung 4.13.: Vergleich des berechneten Schalldruckpegels in der mit X markierten Ebene, Berechnung mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der Systemantworten (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des mathematischen Modells.

Knoten für das äquivalente Fluid besitzt das vereinfachte Modell 9.347 FHG. Als Validierungskriterium wird eine einfache Pegeldifferenz von $\Pi^{\text{EPD}} = 1,5 \text{ dB}$ verwendet. Das Berechnungsergebnis ist in Abbildung 4.13 dargestellt. Die Berechnung wird parallel auf vier Prozessoren durchgeführt. Das Berechnungsergebnis bei Verwendung von einem Prozessor ist in Abbildung C.6 im Anhang dargestellt. Im oberen Teil des Diagramms ist der Schalldruckpegel über der Frequenz, für die Berechnung aller Frequenzstützstellen mit dem Referenzmodell sowie unter Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens, aufgetragen. Die Darstellung im mittleren Diagramm zeigt den Fehler der approximierten Systemantwort über der Frequenz. Im unteren Diagrammteil sind die Frequenzbereiche und die jeweils verwendeten Modelle markiert. Dabei wird der Übersichtlichkeit halber nur an jeder fünften Frequenzstützstelle eine Markierung gesetzt. Es ist zu erkennen, dass beide berechneten Lösungen

gut übereinstimmen. Das vereinfachte Modell wird im tiefen Frequenzbereich unterhalb 1.400 Hz sowie im Bereich von 2.730 – 5.310 Hz eingesetzt. In den verbleibenden Frequenzbereichen wird das Referenzmodell verwendet. Große Abweichungen des berechneten Schalldruckpegels ergeben sich vor allem bei ca. 900 Hz und im Bereich von etwa 3.500 – 4.000 Hz, der maximale Fehler beträgt 4,38 dB.

In Tabelle 4.12 sind die Vergleichsgrößen Rechenzeiterparnis und mittlerer resultierender Fehler für die Berechnung mit einem und vier Prozessoren angegeben. Sowohl der mittlere Fehler ($\Psi = 0,55$ dB) als auch der maximale Fehler (4,38 dB) ist in diesem Beispiel bei Verwendung von vier Prozessoren gering. Für die Berechnung auf einem Prozessor sind die Werte identisch bzw. geringfügig höher (maximaler Fehler: 4,38 dB, mittlerer Fehler: $\Psi = 0,59$ dB). Entgegen den vorherigen Beispielen nimmt hier die Rechenzeiterparnis von 43 % bei Verwendung von einem Prozessor zu 48 % bei Verwendung von vier Prozessoren parallel zu. Dieser Unterschied resultiert aus unterschiedlichen Einsatzbereichen des vereinfachten Modells und des Referenzmodells. Bei der Berechnung mit einem Prozessor werden das vereinfachte Modell und das Referenzmodell jeweils für 50 % des Frequenzbereichs eingesetzt. Bei Verwendung von vier Prozessoren nimmt der Anteil des vereinfachten Modells auf 60 % zu, der Anteil des Referenzmodells nimmt entsprechend auf 40 % ab. Dadurch wird eine größere Rechenzeiterparnis erzielt.

Tabelle 4.12.: Vergleich der Rechenzeiterparnis und des mittleren Fehlers mit und ohne Parallelisierung bei Variation des mathematischen Modells durch Nutzung eines alternativen Materialmodells

	Rechenzeiterparnis	Mittlerer Fehler Ψ
Anzahl Prozessoren	1	43 %
	4	48 %
		0,59 dB
		0,55 dB

Entsprechend des umfangreicheren Einsatzes des vereinfachten Modells bei Verwendung von vier Prozessoren wird auch eine Zunahme des resultierenden Fehlers erwartet. Dies tritt in diesem Beispiel nicht ein, der Fehler nimmt bei Parallelisierung des Verfahrens geringfügig ab. Der Grund für diesen Effekt liegt in der Budgetplanung. Während der Budgetplanung wird auf Basis der Kosten der zur Verfügung stehenden Modelle die mögliche Anzahl der Testpunkte je Frequenzgruppe ermittelt. Eine Anzahl von drei Testpunkten je Frequenzgruppe wird als untere Grenze definiert, vgl. Abschnitt 3.5.3. Wird die so bestimmte, mögliche Anzahl an Testpunkten kleiner als drei, so wird die für eine Anzahl von drei Testpunkten mögliche Anzahl an Frequenzgruppen berechnet. In diesem Beispiel führt diese Berechnung auf nur zwei mögliche Frequenzgruppen bei Verwendung von einem Prozessor. Dies erklärt den Einsatz der beiden, zur Verfügung stehenden Modelle für jeweils genau 50 % des Frequenzbereichs. Basierend auf dem gewählten Validierungskriterium kann das vereinfachte Modell in der ersten Frequenzgruppe verwendet werden. Allerdings führt dieses Verfahren zu einem sehr umfangreichen Einsatz des vereinfachten Modells.

Bei Verwendung von vier Prozessoren dagegen weichen die ermittelten Kosten der Modelle geringfügig ab; die Budgetplanung erlaubt hier fünf Frequenzgruppen im gesamten Frequenzbereich. Dadurch wird ein differenzierterer Einsatz des vereinfachten Modells möglich. Dies resultiert in einem insgesamt geringeren Fehler als bei Verwendung von einem Prozessor.

4.3. Variation des Realitätsmodells

Der Beginn des Modellierungsprozesses nach Abbildung 1.1 ist die Entwicklung eines Realitätsmodells aus der Beobachtung eines Phänomens in der Realität durch einen Beobachter. Dieser Schritt ist für die folgende Konstruktion des mathematischen und des numerischen Modells besonders wesentlich, da die in diesem Schritt eingeführten Annahmen sehr weitreichend sind. Die im folgenden Beispiel untersuchte Annahme basiert auf der Frage, welche Aspekte einer zu berechnenden Fragestellung überhaupt modelliert werden müssen.

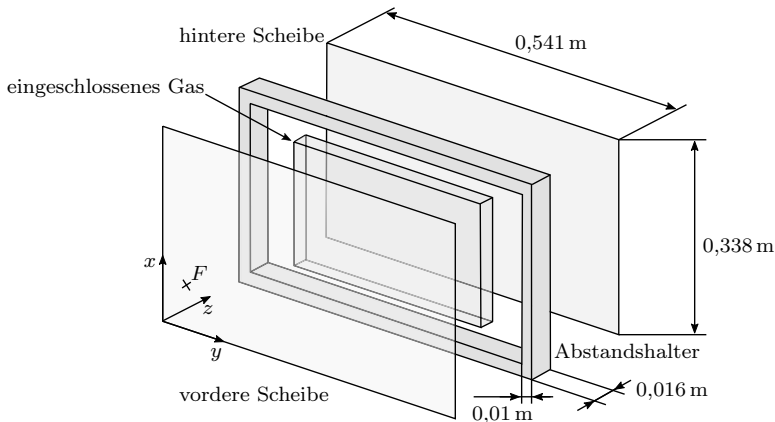


Abbildung 4.14.: Geometrie der Doppelverglasung zur Variation des Realitätsmodells. Das eingeschlossene Gas wird für das vereinfachte Modell nicht modelliert. Anregung durch Punktkraft am Ort F , Berechnung der mittleren quadratischen Schwingschnelle auf der hinteren Scheibe. Lagerung des Systems auf weichen Federn (nicht gezeichnet).

Als zu berechnende Geometrie wird die Verglasung eines Fensters betrachtet. Während in dem ersten Beispiel dieser Arbeit nur eine einzelne Glasscheibe betrachtet wurde, wird hier eine Zweifachverglasung mit einem Abstandshalter und einem eingeschlossenen Gasvolumen untersucht. Die Geometrie der Verglasung ist in Abbildung 4.14 schematisch dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber sind alle Einzelteile

der Verglasung separat und voneinander getrennt gezeichnet. Alle für die Modellierung relevanten Daten sind in Tabelle 4.13 zusammengefasst. Berechnet wird die über die hintere Scheibe gemittelte Schwingschnelle bei Anregung mit einer Punktkraft mit einer Amplitude von 1 N in Richtung der z-Achse auf der vorderen Scheibe am dem mit einem F markierten Ort (0,06/0,11) m. Die Dicke der vorderen Scheibe beträgt $d_{\text{vorne}} = 0,01$ m, die hintere Scheibe ist $d_{\text{hinten}} = 0,004$ m dick. Der Abstandshalter (Absth.) wird als hohles Vierkant-Profil mit einer Wanddicke von $d_{\text{Absth.}} = 0,001$ m modelliert. Der Abstand der Scheiben beträgt, entsprechend der Breite des Abstandshalters, 0,016 m. Die Stegbreite des Abstandshalters beträgt 0,01 m. Als Lagerung werden weiche, stark gedämpfte Federn in Richtung der z-Achse verwendet. Diese sind in Abbildung 4.14 nicht eingezeichnet. Die Berechnung wird für den Frequenzbereich von 50 – 3.150 Hz mit 621 Frequenzstützstellen und einer Frequenzauflösung von $\delta f = 5$ Hz durchgeführt. Als Validierungskriterium wird eine mittlere Pegeldifferenz mit einem tolerierten Fehler von $\Pi^{\text{MPD}} = 6,0$ dB verwendet.

Das Referenzmodell berücksichtigt alle in Abbildung 4.14 gezeigten Einzelteile. Das vereinfachte Modell wird durch die Variation des Realitätsmodells abgeleitet. Dazu wird das zwischen den Scheiben eingeschlossene Gasvolumen bei der Diskretisierung nicht berücksichtigt. Das Realitätsmodell wird somit verkürzt, da das Gasvolumen als für die Berechnung nicht relevant betrachtet wird. Aufgrund der Schwingungsanregung durch die harmonische Punktkraft auf der vorderen Scheibe beginnt das gesamte System mit der Anregungsfrequenz zu schwingen. Sind die Verschiebungen der vorderen und hinteren Scheibe verschieden, so entsteht in dem eingeschlossenen Gasvolumen eine Druckverteilung. Die in der vorderen Scheibe angeregten Schwingungen transmittieren somit sowohl über den aus Aluminium bestehenden Abstandshalter, als auch über das an die Scheiben angekoppelte Gasvolumen. Für die Ableitung des vereinfachten Modells wird angenommen, dass der Leistungsfluss über das Gasvolumen im Vergleich zu der über den Abstandshalter fließenden Leistung klein ist. Für diesen Fall kann das Gasvolumen vernachlässigt werden. Aufgrund der für das Gasvolumen erforderlichen Diskretisierung mit Volumenelementen kann durch diese Vernachlässigung eine relevante Reduktion des entstehenden numerischen Modells erzielt werden.

Die Scheiben und der Abstandshalter werden mittels Schalenelementen diskretisiert. Das eingeschlossene Gasvolumen verwendet Hexaeder-Volumenelemente. Alle Elemente verwenden quadratische Ansatzfunktionen. Die verwendete Elementkantenlänge wird in diesem Beispiel anhand der Longitudinalwellenlänge des eingeschlossenen Gasvolumens bestimmt. Dies ist erforderlich, da die höchste zu berechnende Frequenz größer als die Koinzidenz-Grenzfrequenz ist, die Luftschallwellenlänge ist somit kleiner als die Biegewellenlänge der beiden Scheiben. Für die Modellierung des Gasvolumens werden die Materialparameter für Luft verwendet. Für die höchste, zu berechnende Frequenz von 3.150 Hz beträgt die Longitudinalwellenlänge 0,11 m. Die Elementkantenlänge wird somit aus $\beta = 0,025$ m festgelegt, damit beträgt die Auflösung etwa zehn Knoten je Wellenlänge bei der höchsten, zu berechnenden Frequenz.

Tabelle 4.13.: Modellparameter der Verglasung und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des Realitätsmodells; Abkürzungen: (S) Scheibe, (G) Gas, (A) Abstandshalter, (F) Federn

Materialdaten		Diskretisierung (Referenzmodell)	
E-Modul (S)	$E_{\text{Scheibe}} = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Elementkantenlänge $\beta = 0,025 \text{ m}$	
Dichte (S)	$\rho_{\text{Scheibe}} = 2.460 \text{ kg/m}^3$		
Poisson-Zahl (S)	$\nu_{\text{Scheibe}} = 0,46$	Elementtypen	
Glasdicke (S, vorn)	$d_{\text{vorne}} = 0,01 \text{ m}$	Gas	Hexaeder
Glasdicke (S, hinten)	$d_{\text{hinten}} = 0,004 \text{ m}$	Abstandhalter	Schalen
Verlustfaktor (S)	$\eta_{\text{Scheibe}} = 0,03$	Scheiben	Schalen
Dichte (G)	$\rho_{\text{Gas}} = 1,225 \text{ kg/m}^3$	Ansatzfunktion	quadratisch
Schallgeschwindigkeit (G)	$c_{\text{Gas}} = 340 \text{ m/s}$		
E-Modul (A)	$E_{\text{Absth.}} = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Anzahl FHG	22.623
Dichte (A)	$\rho_{\text{Absth.}} = 2.700 \text{ kg/m}^3$		
Wanddicke (A)	$d_{\text{Absth.}} = 0,001 \text{ m}$	Randbedingungen / Lasten	
Poisson-Zahl (A)	$\nu_{\text{Absth.}} = 0,34$	Randbedingung	eingespannt, Federfußpunkte
Verlustfaktor (A)	$\eta_{\text{Absth.}} = 0,05$	Last	Punktkraft, $F' = 1 \text{ N}$
Steifigkeit (F)	$\zeta_{\text{Federn}} = 100 \text{ N/m}$		
Verlustfaktor (F)	$\eta_{\text{Federn}} = 0,1$		
Parameter des Multi-Modell-Verfahrens			
Validierungskriterium		mittlere Pegeldifferenz	
Zulässiger Fehler		6,0 dB	
Vereinfachte Modelle (Anzahl)		1	
Vereinfachte Modelle (Art)		Variation des Berechnungsgebiets	
Ergebnisgröße		Mittlere quad. Schnelle (Scheibe hinten)	
Frequenzbereich		50 – 3.150 Hz	
Anzahl Frequenzstützstellen		621	
Frequenzauflösung		5 Hz	

Das Berechnungsergebnis bei Verwendung von vier Prozessoren parallel ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Das mit einem Prozessor erzielte Ergebnis ist im Anhang in Abbildung C.7 zu finden. Dabei ist im oberen Diagramm der Pegel der mittleren quadratischen Schwingschnelle der hinteren Scheibe über der Frequenz, sowohl für die direkte Berechnung mittels des Referenzmodells als auch bei Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens, dargestellt. Im unteren Diagramm ist für jede zehnte Frequenzstützstelle das verwendete Modell markiert. Es ist zu erkennen, dass das vereinfachte Modell im Bereich von 680 – 1.295 Hz verwendet wird. Für alle weiteren Frequenzbereiche wird das Referenzmodell verwendet. Die Abweichung zwischen den

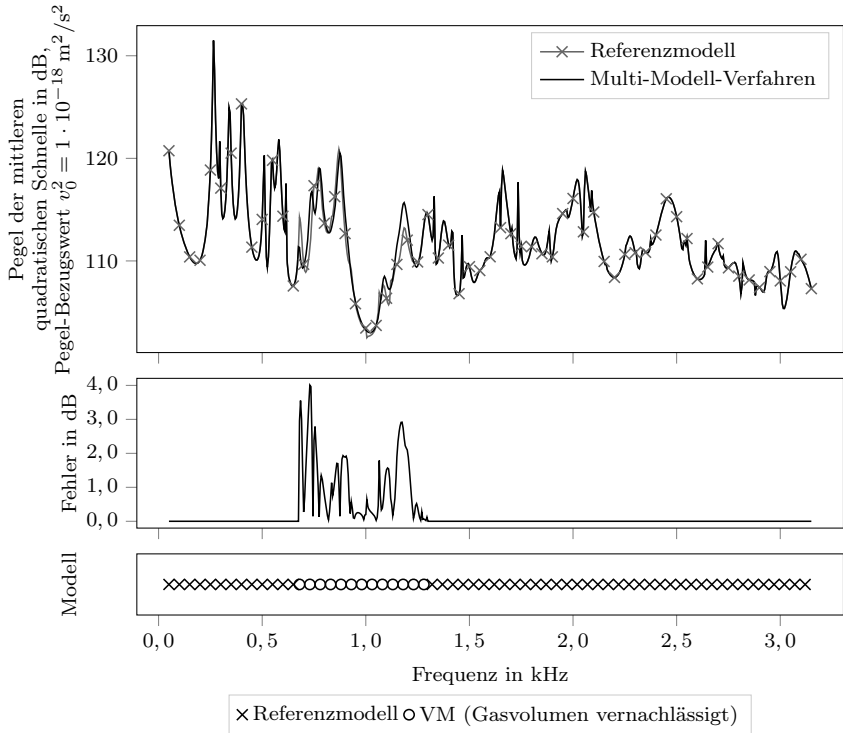


Abbildung 4.15.: Vergleich der berechneten mittleren quadratischen Schnelle auf der hinteren Scheibe mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der Systemantworten (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des Realitätsmodells.

berechneten Systemantworten ist in dem Bereich, in dem das vereinfachte Modell verwendet wird, gering. Für die Berechnung mit einem Prozessor wird das vereinfachte Modell für einen großen Frequenzbereich von 1.300 – 3.150 Hz verwendet. Hier ist besonders gut der Effekt der Vernachlässigung des eingeschlossenen Gasvolumens zu erkennen. Die Systemantwort wird für nahezu alle Frequenzstützstellen mit sehr hoher Genauigkeit berechnet. Allerdings fehlen Resonanzstellen. Dies sind Resonanzen des eingeschlossenen Gasvolumens und können durch das vereinfachte Modell nicht ermittelt werden. Auf den Frequenzgang der Systemantwort hat diese Vernachlässigung sonst jedoch nur geringen Einfluss.

Die quantitativen Vergleichsgrößen, der mittlere resultierende Fehler und die Rechenzeitersparnis zwischen der direkten Berechnung des Referenzmodells und der Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens, sind in Tabelle 4.14 angege-

ben. Grundsätzlich ist zu erkennen, dass der erzielte Fehler bei beiden Berechnungen klein ist. Dabei beträgt der mittlere Fehler für die parallele Berechnung auf vier Prozessoren $\Psi = 0,27$ dB (maximaler Fehler: 4,00 dB). Bei Verwendung von einem Prozessor ist der mittlere Fehler $\Psi = 0,56$ dB (maximaler Fehler: 7,56 dB). Der geringe Fehler ist hier insgesamt, vor allem bei der Verwendung von vier Prozessoren, das Ergebnis des vergleichsweise geringen Anteils des vereinfachten Modells von ca. 20 % an der Gesamtlösung. Ohne Parallelisierung liegt der Anteil des vereinfachten Modells mit ca. 60 % höher, dies erklärt den höheren Fehler.

Tabelle 4.14.: Vergleich der Rechenzeiterparnis und des mittleren Fehlers mit und ohne Parallelisierung bei Variation des Realitätsmodells

		Rechenzeiterparnis	Mittlerer Fehler
Anzahl Prozessoren	1	−5 %	0,56 dB
	4	−30 %	0,27 dB

Gegenüber dem guten Ergebnis für den resultierenden Fehler ist die erzielte Rechenzeiterparnis negativ. Die Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens erfordert mehr Rechenzeit als die direkte Berechnung mit dem Referenzmodell. Dabei wird bei Verwendung von einem Prozessor die Rechenzeit um 5 % verlängert. Für eine parallele Berechnung mit vier Prozessoren erfordert die Berechnung 30 % mehr Rechenzeit. Die relative Änderung der beiden Varianten zueinander, also das Erzielen einer geringeren Rechenzeiterparnis bei Parallelisierung des Verfahrens, entspricht den bisherigen Beobachtungen bei den vorherigen Beispielen. Der Grund ist auch hier die in Abschnitt 4.2.1 angesprochene Proportionalität der Rechenzeiterparnis zu der Anzahl der zu berechnenden Frequenzstützstellen. Durch Nutzung mehrerer Prozessoren parallel sind für den einzelnen Prozessor weniger Frequenzstützstellen zu lösen, dies reduziert die erzielbare Rechenzeiterparnis. Somit liefert das Verfahren bei Verwendung von einem Prozessor hinsichtlich der Rechenzeit bessere Resultate als bei einer Parallelisierung. Der Grund für die deutlich negative Rechenzeiterparnis bei Verwendung von vier Prozessoren liegt in einer deutlichen Fehlschätzung der Anteile der zur Verfügung stehenden Modelle an der Gesamtlösung. Zu Beginn des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens werden die für jedes Modell erforderlichen Kosten durch Messung der für eine Frequenzstützstelle erforderlichen Rechenzeit ermittelt. Diese Kosten werden für die Budgetplanung verwendet. Dabei wird der Anteil jedes Modells an der Gesamtlösung anhand der jeweiligen Kosten des Modells unter Verwendung der Gleichungen (3.19)-(3.21) geschätzt. Die Schätzung geht davon aus, dass Modelle mit höheren Kosten eine höhere Ergebnisqualität bieten und somit in größeren Frequenzbereichen verwendet werden als Modelle mit geringen Kosten. Für das vorliegende Beispiel wird der Anteil des Referenzmodells auf 56 % aller Frequenzstützstellen geschätzt, das vereinfachte Modell wird im Rahmen der Budgetplanung somit für 44 % der Frequenzstützstellen berücksichtigt. Anhand der Ergebnisdarstellung in Abbildung 4.15 ist zu erkennen, dass das vereinfachte Modell bei Verwendung von vier Prozessoren tatsächlich nur

für 19,9 % der Frequenzstützstellen verwendet wird. Dieser Anteil ist deutlich geringer als während der Budgetplanung geschätzt. Aufgrund dieser Fehleinschätzung kann in diesem Beispiel keine positive Rechenzeiterparnis erzielt werden.

Die fehlerhafte Budgetplanung erklärt hier die deutlich negative Rechenzeiterparnis bei Verwendung von vier Prozessoren. Allerdings ist der Ansatz nicht in der Lage, die bei Verwendung von einem Prozessor ebenfalls negative Rechenzeiterparnis zu begründen. Wie in Abbildung C.7 zu erkennen ist, wird das vereinfachte Modell hier für 59,7 % der Frequenzstützstellen verwendet. Dieser Anteil ist höher als im Rahmen der Budgetplanung geschätzt. Eine Rechenzeiterparnis hätte nach diesem Kriterium erreicht werden können. Der Grund für die dennoch negative Rechenzeiterparnis ist eine Eigenschaft des gewählten Verfahrens zur Aufteilung des Frequenzbereichs in Frequenzgruppen. In Abschnitt 3.5.3 wird das Verfahren der Budgetplanung anhand einer bereits bekannten Anzahl Frequenzgruppen beschrieben. Die Frequenzgruppen werden anhand der mit dem günstigen vereinfachten Modell berechneten Lösung ermittelt. Dieser Aufwand muss für eine Rechenzeiterparnis durch den Einsatz der vereinfachten Modelle kompensiert werden. Dazu wird die Anzahl der Testpunkte so gewählt, dass gerade eine positive Ersparnis erreicht wird, vgl. Gleichung (3.24). Für ungünstige Verteilungen der Kosten der zur Verfügung stehenden Modelle wird die Anzahl möglicher Testpunkte kleiner als drei. Dies wird als nicht sinnvoll eingestuft. In diesem Fall wird die Anzahl der Testpunkte auf drei festgelegt und die Anzahl möglicher Frequenzgruppen bestimmt. Bei dieser Berechnung kann die Anzahl möglicher Frequenzgruppen negativ werden. Dies tritt auf, wenn der Unterschied der Kosten der vereinfachten Modelle und des Referenzmodells nicht groß genug ist. Es ist dann nicht möglich, mit der auf Basis der Kosten geschätzten Anteile der Modelle an der Gesamtlösung eine Rechenzeiterparnis zu erzielen. Um das Verfahren in diesem Fall trotzdem durchführen zu können wird die Anzahl der Frequenzgruppen auf das doppelte der Anzahl der zur Verfügung stehenden Modelle festgelegt und mit einer Anzahl von drei Testpunkten das Verfahren fortgesetzt. Die Idee dieses Vorgehens ist es, auch dann das Multi-Modell-Verfahren zu nutzen, wenn zunächst keine Rechenzeiterparnis erwartet werden kann. Die Planung basiert auf geschätzten Anteilen der einzelnen Modelle an der Gesamtlösung. Trifft diese Schätzung nicht zu und ist die Schätzung zu konservativ, kann weiterhin eine Rechenzeiterparnis erreicht werden. Dies ist beispielsweise in Abbildung 3.5 illustriert.

In diesem Beispiel tritt der oben beschriebene Fall ein. Während der Budgetplanung werden für das Referenzmodell die Kosten zu $\theta_0 = 4,68^2$ bestimmt. Die Kosten des vereinfachten Modells betragen $\theta_1 = 3,74$. Mit diesen Kosten führt die Auswertung von Gleichung (3.24) auf eine negative Zahl von -83 Testpunkten. Es wird daher die Anzahl der Testpunkte auf $n_t = 3$ festgelegt und die Anzahl möglicher Frequenzgruppen berechnet. Auch diese Berechnung liefert einen negativen Wert. Daher wird die Anzahl der Frequenzgruppen, wie beschrieben, auf $n_g = 4$ gesetzt und das Verfahren fortgesetzt. Die mit den willkürlich verwendeten Werten erzielte negative Rechenzeiterparnis wird hier noch gemindert, da das vereinfachte Modell

² die Dimension der Kosten ist Sekunden / Frequenzstützstelle

in einem größeren Bereich verwendet wird (59,7%), als zu Beginn des Verfahrens geschätzt (44%). Dennoch kann die aus der Verwendung des vorgestellten Multi-Modell-Verfahrens resultierende Verlängerung der Berechnung nicht vermieden werden.

4.4. Untersuchungen zu den Eigenschaften des Verfahrens

Die dargestellten Verifikationsbeispiele zeigen, dass das entwickelte Multi-Modell-Verfahren grundsätzlich in der Lage ist, durch Verwendung zusätzlicher, vereinfachter Modelle in den meisten Fällen eine Reduktion der erforderlichen Rechenzeit zu erreichen. Der durch die Verwendung der vereinfachten Modelle generierte Fehler ist vergleichsweise klein und scheint für praktische Anwendung des Verfahrens akzeptabel. Das Verfahren ist in der Lage eine beliebige Anzahl vereinfachter Modelle für die Berechnung zu verwenden und validiert diese mittels Validierungskriterien gegen das Referenzmodell. Während die bisherigen Verifikationsbeispiele die Anwendbarkeit des Verfahrens zeigen, betrachten die folgenden Untersuchungen einige ausgewählte Eigenschaften des vorgestellten Multi-Modell-Verfahrens. Es wird dabei zunächst untersucht, wie sich die Anzahl der verwendeten vereinfachten Modelle auf die erzielbare Rechenzeiterparnis auswirkt. Diese Untersuchung ist insofern wesentlich, als dass die zusätzlichen Modelle durch einen Anwender erzeugt werden. Dies ist nur gerechtfertigt, wenn die Erzeugung zusätzlicher, vereinfachter Modelle einen Nutzen hinsichtlich der erreichbaren Rechenzeiterparnis ermöglicht. Weiterhin wird der Einfluss der in Abschnitt 3.5.4 vorgestellten, zufallsbasierten Abbruchentscheidung auf die erreichbare Rechenzeiterparnis untersucht. Darüber hinaus sind für die Anwendung des Verfahrens die durch den Anwender zu treffenden Entscheidungen hinsichtlich des zu wählenden Validierungskriteriums sowie des zulässigen Fehlers an den Testpunkten wesentlich. Daher wird abschließend der Einfluss dieser Wahlmöglichkeiten auf das Berechnungsergebnis und die resultierende Rechenzeiterparnis betrachtet.

Die verschiedenen Aspekte werden anhand eines Berechnungsbeispiels untersucht. Dazu wird eine durch eine harmonische Einheitskraft angeregte, 0,005 m dicke Stahlplatte im Frequenzbereich von 100 – 1.500 Hz mit 281 Frequenzstützstellen als Modell verwendet. Die zu berechnende Geometrie ist in Abbildung 4.16 dargestellt. Der Kraftangriffspunkt ist mit einem F markiert. Alle Kanten der Platte sind eingespannt. Die berechnete Größe ist die mittlere quadratische Schwingschnelle auf der Platte. Die für die Modellierung relevanten Daten sind in Tabelle 4.15 angegeben. Aufgrund der umfangreichen Berechnungen wird nur der Fall für eine parallele Berechnung mit vier Prozessoren betrachtet. Wie die Verifikationsbeispiele zeigen sind die so ermittelten Rechenzeiterparnisse konservativ. Für die Berechnung auf einem Prozessor kann mit größeren Ersparnissen gerechnet werden.

Die Geometrie der Platte wird für das Referenzmodell mit einer Elementkantenlänge von $\beta^{\text{Ref}} = 0,035$ m diskretisiert. Damit ist eine Diskretisierung von zehn Knoten je Wellenlänge bis zu einer Frequenz von 1.500 Hz sichergestellt. Weiterhin werden

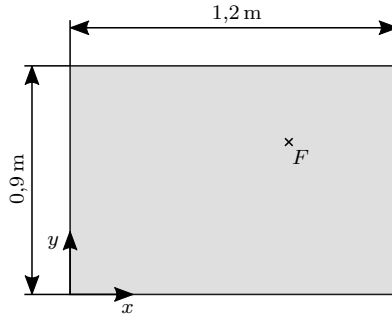


Abbildung 4.16.: Geometrie der zu berechnenden Platte zur Untersuchung der Eigenschaften des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens. Ort der anregenden Punktkraft F , Berechnung der mittleren quadratischen Schwingsschnelle auf der Platte. Alle Kanten eingespannt.

insgesamt sechs vereinfachte Modelle durch Variation der Diskretisierung abgeleitet. Es handelt sich somit um die Variation des numerischen Modells. Die Elementkantenlängen der zusätzlichen Diskretisierungen sind in Tabelle 4.16 dargestellt. Alle Modelle werden mit Schalenelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert. Für das Referenzmodell resultierte diese Diskretisierung in einem Gleichungssystem mit insgesamt 21.942 FHG. Die gewählten Elementkantenlängen, Anzahl der FHG sowie die maximal zu erwartende Einsatzfrequenz der vereinfachten Modelle sind ebenfalls in der Tabelle 4.16 angegeben.

In Abschnitt 3.1 ist in Abbildung 3.1 das Berechnungsergebnis des hier verwendeten Modells zur Illustration der Idee des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens für die Berechnung mit drei vereinfachten Modellen dargestellt. Dies entspricht der für die nachfolgenden Untersuchungen verwendeten Variation 4 aus Tabelle 4.17, mit Ausnahme der Untersuchungen in Abschnitt 4.4.1. Dabei ist in der oberen Darstellung der Pegel der berechneten mittleren quadratischen Schnelle auf der Platte für alle verwendeten Modelle über der Frequenz aufgetragen. In der unteren Darstellung ist der Betrag der Pegeldifferenz der vereinfachten Modelle gegenüber dem Referenzmodell ('Modell 1') über der Frequenz aufgetragen.

Bei der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Entwicklung der Idee des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens wird, auf Basis der anhand der Diskretisierung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle, eine Rechenzeiterparnis von bis zu 24 % in Aussicht gestellt. Wie in Abschnitt 4.4.1 gezeigt, beträgt die tatsächlich erzielbare Rechenzeiterparnis mit dem entwickelten Verfahren ca 14 %. Dieser Unterschied ist das Resultat der zur Laufzeit des Verfahrens erforderlichen Validierungsprozesse. Die Validierung der vereinfachten Modelle erfordert einen zusätzlichen Berechnungsaufwand der die erzielbare Rechenzeiterparnis reduziert. Dennoch ist der Unterschied zwischen der maximal erzielbaren und der tatsächlich erreichten Rechenzeiterparnis

Tabelle 4.15.: Modellparameter der Platte und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Untersuchung der Eigenschaften des Verfahrens

Materialdaten		Diskretisierung (Referenzmodell)	
E-Modul	$E = 210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Elementkantenlänge	$\beta = 0,035 \text{ m}$
Dichte	$\rho = 7.800 \text{ kg/m}^3$	Elementtyp	9-Knoten Schalen
Poisson-Zahl	$\nu = 0,3$	Ansatzfunktion	quadratisch
Dicke	$d = 0,005 \text{ m}$	Anzahl FHG	21.942
Randbedingungen / Lasten			
		Randbedingung	eingespannt (alle Kanten)
		Last	Punktkraft, $F' = 1 \text{ N}$
Parameter Multi-Modell Verfahren			
Validierungskriterium	Variation, vgl. Abschnitt 4.4.3		
Zulässiger Fehler	Variation, vgl. Abschnitt 4.4.4		
Vereinfachte Modelle (Anzahl)	Variation, vgl. Abschnitt 4.4.1		
Vereinfachte Modelle (Art)	Variation, vgl. Tabelle 4.16		
Ergebnisgröße	Mittlere quadratische Schnelle		
Frequenzbereich	100 – 1.500 Hz		
Anzahl Frequenzstützstellen	281		
Frequenzauflösung	5 Hz		

vergleichsweise gering. Das entwickelte Verfahren ist somit in der Lage den zusätzlichen Berechnungsaufwand möglichst zu minimieren und eine möglichst große Rechenzeitersparnis bei gleichzeitig hoher Robustheit sicher zu stellen.

4.4.1. Einfluss der Anzahl vereinfachter Modelle

Für den praktischen Einsatz des Verfahrens ist die Anzahl der verwendeten, vereinfachten Modelle wesentlich. Daher wird diese Anzahl im folgenden Abschnitt variiert. In Tabelle 4.17 sind sechs Testfälle angegeben. Für jeden Testfall wird eine Teilmenge der in Tabelle 4.16 angegebenen, vereinfachten Modelle verwendet. Die Auswahl der für die jeweilige Berechnung gewählten Modelle zielt auf eine möglichst gleichmäßige Verteilung ab. Daher wird für den Fall nur eines vereinfachten Modells das Modell VM 2 ausgewählt. Mit einer Grenzfrequenz für eine Diskretisierung von zehn Knoten je Wellenlänge bei ca. 500 Hz wird ein möglichst großer Einsatzbereich des Modells erwartet. Gleichermäßen zielt diese Wahl darauf ab, ein Modell mit ausreichend geringem Berechnungsaufwand zu wählen. Für den Fall mit zwei vereinfachten Modellen wird das Modell VM 4 hinzugenommen. Dadurch wird eine Verbesserung der Effizienz durch den Einsatz bei tiefen Frequenzen erwartet. Tabelle 4.17 gibt für alle weiteren Variationen die verwendeten, vereinfachten Modelle an. Prinzipiell

Tabelle 4.16.: Übersicht der vereinfachten Modelle zur Untersuchung der Eigenschaften des Verfahrens

Bezeichnung	Elementkantenlänge	max. Frequenz (10 Knoten / Wellenlänge)	Anzahl FHG
VM 1	0,050 m	800 Hz	10.878
VM 2	0,065 m	500 Hz	6.438
VM 3	0,080 m	310 Hz	4.278
VM 4	0,095 m	220 Hz	3.078
VM 5	0,110 m	165 Hz	2.346
VM 6	0,125 m	125 Hz	1.890

kann für jeden Frequenzbereich ein bestmöglich passendes Modell gefunden werden. Das so gefundene Modell ist im Sinne der Definition in Abschnitt 1.3 das effektivste Modell. Insgesamt wird daher erwartet, dass die erforderliche Rechenzeit mit dem Hinzunehmen weiterer, vereinfachter Modelle sukzessive abnimmt.

Tabelle 4.17.: Übersicht der Variation der verwendeten vereinfachten Modelle

Anzahl vereinfachter Modelle	verwendete Modelle
1	VM 2
2	VM 2, VM 4
3	VM 2, VM 4, VM 6
4	VM 1, VM 3, VM 4, VM 6
5	VM 2, VM 3, VM 4, VM 5, VM 6
6	VM 1, VM 2, VM 3, VM 4, VM 5, VM 6

Die resultierende Rechenzeiterparnis ist in Abbildung 4.17 dargestellt. Aufgetragen ist die erforderliche Rechenzeit der in Tabelle 4.17 definierten Variationen über der Anzahl der verwendeten, vereinfachten Modelle. Die Rechenzeit ist relativ zu der für die Berechnung des Referenzmodells erforderlichen Rechenzeit dargestellt. Zusätzlich ist als gestrichelte Linie die relative Rechenzeit des Referenzmodells bei 1,0 eingetragen. Für eine relative Rechenzeit mit dem Multi-Modell-Verfahren unterhalb dieser Linie wird eine Rechenzeiterparnis erreicht. Es ist zu erkennen, dass die Erwartung einer sukzessive abnehmenden Rechenzeit nicht eintritt. Die Rechenzeiterparnis verbleibt bei zunehmender Anzahl vereinfachter Modelle zunächst auf einem ähnlichen Niveau von ca. 14 %. Werden fünf oder mehr vereinfachte Modelle verwendet, so verschwindet die Rechenzeiterparnis, das Verfahren wird langsamer als bei direkter Lösung des Referenzmodells.

Der Grund für dieses Verhalten ist vor allem der aufgrund der zusätzlichen Validierungsprozesse erforderliche zusätzliche Berechnungsaufwand. Prinzipiell ermög-

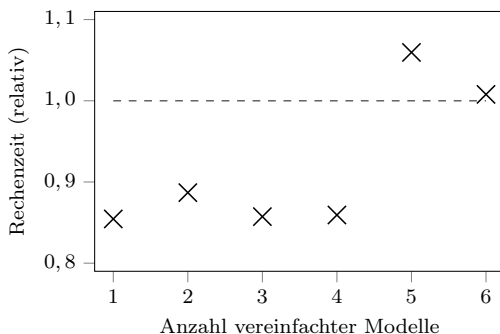


Abbildung 4.17.: Erzielte Rechenzeit, relativ zur Rechenzeit des Referenzmodells (‘—’), bei Variation der Anzahl der zur Verfügung stehenden, vereinfachten Modelle, entsprechend Tabelle 4.17

lichen die zusätzlich vorhandenen, vereinfachten Modelle eine Effizienzsteigerung, da in jedem Frequenzbereich das geeignetste Modell verwendet werden könnte. Dieser Vorteil wird allerdings durch die zusätzlich erforderlichen Validierungsprozesse kompensiert. Es kommt daher, trotz zusätzlicher verfügbarer Modelle nicht zu einer weiteren Rechenzeiterparnis. Werden fünf oder mehr vereinfachte Modelle verwendet, so überwiegt der Berechnungsaufwand für die Validierungsprozesse. Es kommt zu einer Verlängerung des Verfahrens gegenüber der direkten Berechnung des Referenzmodells. Für alle folgenden Untersuchungen dieses Abschnitts wird die Variation 3 aus Tabelle 4.17 verwendet. Es stehen also neben dem Referenzmodell drei vereinfachte Modelle zur Verfügung.

4.4.2. Einfluss der wahrscheinlichkeitsbasierten Abbruchentscheidung

Das entwickelte Verfahren ist mit dem Ziel konstruiert, eine möglichst große Sicherheit beim Einsatz der vereinfachten Modelle zu gewährleisten. Das Ziel ist eine möglichst hochwertige Approximation der Referenzlösung, dies wird durch eine eher geringe Rechenzeiterparnis erreicht. Dazu wird im Rahmen der Budgetplanung die Anzahl der Testpunkte, an denen die Systemantworten der vereinfachten Modelle mit dem Referenzmodell verglichen werden, maximiert. Diese Maximierung wird unter der Nebenbedingung der geschätzten Anteile der zur Verfügung stehenden Modelle an der Gesamtlösung durchgeführt. Trifft diese Schätzung zu, so ist der Berechnungsaufwand des entwickelten Verfahrens identisch mit der direkten Berechnung der Lösung nur anhand des Referenzmodells. In Abschnitt 3.5.4 werden Abbruchkriterien definiert. Diese Kriterien werden verwendet, um den Validierungsprozess zu verkürzen. Dazu wird während der fortschreitenden Berechnung zusätzlich verfügbares Wissen genutzt. Dazu wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Validierungsprozess bei einer höheren Frequenz abnimmt, wenn

bereits bei niedrigen Frequenzen viele Validierungsprozesse nicht erfolgreich waren. Wird ein solches Verhalten erkannt, wird die Validierung eines vereinfachten Modells vor der Validierung in allen Frequenzgruppen abgebrochen. Das entwickelte Verfahren erzeugt die wesentliche Rechenzeiterparnis durch Nutzung dieser Abbruchkriterien. Die Abbruchentscheidung wird mit einem zufallsbasierten Verfahren getroffen, das entwickelte Multi-Modell-Verfahren ist somit nicht deterministisch. Daher wird nachfolgend untersucht, inwieweit sich das gewählte Verfahren auf die Rechenzeiterparnis auswirkt.

Um den Einfluss der zufallsbasierten Abbruchentscheidung quantifizieren zu können wird die Berechnung unter Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens einhundertmal wiederholt. Als Beispiel wird Variation 3 aus Tabelle 4.17 verwendet. Neben dem Referenzmodell stehen also drei vereinfachte Modelle zur Verfügung. Für jede Wiederholung wird die Rechenzeit ermittelt. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.18 als Boxplot dargestellt. Die Daten sind als relative Rechenzeit aufgetragen.

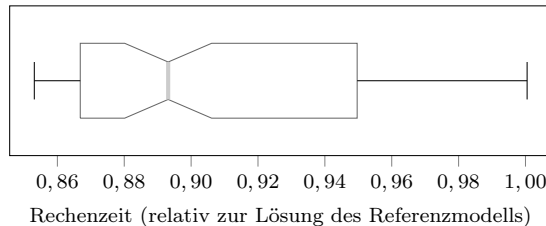


Abbildung 4.18.: Verteilung der Rechenzeit bei einhundert identischen Berechnungen. Rechenzeit relativ zur Lösung mit dem Referenzmodell aufgetragen. Mittelwert 91 %, Standardabweichung 4,6 %.

Die relative Rechenzeit beträgt im Mittel über alle Berechnungen 91 % der für die Lösung des Referenzmodells erforderlichen Zeit. Die Rechenzeiterparnis beträgt im Mittel somit 9 %. Die relative Standardabweichung beträgt 4,6 %. Grundsätzlich zeigt dies bereits die Auswirkung der zufallsbasierten Abbruchentscheidung. Die erzielbare Rechenzeiterparnis wird zu einer Zufallsvariable und somit unsicher. Die in Abbildung 4.17 für drei vereinfachte Modelle gezeigte Rechenzeiterparnis von 14,3 % ist somit bereits höher als der Erwartungswert. Die in Abbildung 4.18 gezeigte Darstellung als Boxplot illustriert die Verteilung der erzielten Rechenzeiten. Der Median teilt die Population am 50 %-Quantil. Er liegt bei dieser Untersuchung bei 89,3 % und damit relativ nah an dem Mittelwert. Allerdings ist die Verteilung nicht symmetrisch, der Median ist nach links verschoben. Die obere Hälfte der Werte streut über einen größeren Bereich als die untere Hälfte der Population. Trotz der eher geringen Standardabweichung ist die Streuung aller Werte, hier dargestellt durch die Whisker, recht groß. Die größte ermittelte relative Rechenzeit beträgt 1,0004 und ist damit praktisch identisch mit der für die Lösung des Referenzmodells erforderlichen Rechenzeit.

Diese Untersuchung zeigt deutlich, dass sich das entwickelte Multi-Modell-Verfahren wie erwartet verhält. Das Verfahren maximiert die Anzahl der Validierungsprozesse anhand der Berechnung der möglichen Anzahl der Testpunkte unter der Nebenbedingung einer positiven Rechenzeiterparnis. Werden die Validierungsprozesse für alle Frequenzgruppen durchgeführt, so verschwindet die Rechenzeiterparnis. Die zufallsbasierte Abbruchentscheidung, nach vielen erfolglosen Validierungsprozessen die Validierung in weiteren Frequenzgruppen abubrechen, erzielt die eigentliche Rechenzeiterparnis. In den meisten Fällen wird eine positive Rechenzeiterparnis erzielt. In ungünstigen Fällen dagegen, wenn sehr viele oder alle Validierungsprozesse durchgeführt werden, verschwindet die Rechenzeiterparnis. Dies wird durch die Verteilung der erzielten Rechenzeiten in Abbildung 4.18 deutlich gezeigt. Dabei gilt weiterhin, dass eine Rechenzeiterparnis nur erzielt werden kann, wenn die vereinfachten Modelle eine ausreichende Ergebnisqualität bei gleichzeitig ausreichend geringen Kosten erzielen. Dies zeigt die Untersuchung zur Variation des Realitätsmodells in Abschnitt 4.3.

4.4.3. Einfluss des gewählten Validierungskriteriums

Der Anwender des vorgestellten Multi-Modell-Verfahrens wählt vor Beginn der Berechnung das zu verwendende Validierungskriterium aus. Diese Entscheidung beeinflusst das Berechnungsergebnis maßgeblich und hängt sowohl von dem Ziel und den Annahmen des Anwenders als auch von dem Wissenschaftsgebiet ab. Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Beispiele sind aus der Akustik entnommen. In der Akustik ist die Darstellung von Größen als Pegel üblich, daher können durch den Anwender Pegeldifferenzen als Validierungskriterium gewählt werden. Für Anwendungen des Verfahrens außerhalb der Akustik können ebenso lineare Differenzen der berechneten Systemantworten verwendet werden. Als weitere Größe ist der so genannten Bhattacharyya-Koeffizient verwendbar. Der Bhattacharyya-Koeffizient betrachtet die zu vergleichenden Systemantworten als Zufallsvariablen. Das Ziel dieses Kriteriums ist eine „weiche“ Vergleichsgröße, die einen ingenieurmäßigen Vergleich der Systemantworten erlaubt (siehe auch Abschnitt 3.5.2).

Die folgende Untersuchung vergleicht die Ergebnisse des vorgestellten Multi-Modell-Verfahrens bei Anwendung der zur Verfügung stehenden Validierungskriterien. Als Berechnungsmodell wird ebenfalls Variation 3 aus Tabelle 4.17 verwendet. Es stehen somit neben dem Referenzmodell drei vereinfachte Modelle zur Verfügung. In Tabelle 4.18 sind die untersuchten Validierungskriterien und die jeweils verwendeten, an den Testpunkten zulässigen Fehler angegeben. Die Werte der tolerierten Fehler an den Testpunkten sind so gewählt, um die verschiedenen Validierungskriterien möglichst vergleichen zu können. Für das Validierungskriterium der *einfachen Differenz* wird ein Wert von $2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}^2$ verwendet. Die Differenz der Systemantworten des Referenzmodells sowie der vereinfachten Modelle dürfen diesen Wert für keinen Testpunkt überschreiten. Die Bestimmung dieses Wertes ist im Vorfeld einer Berechnung herausfordernd, da die Größenordnung der Werte der Systemantwort

nicht bekannt ist. Der Wert der Systemantwort hängt neben den Schwingungseigenschaften des zu berechnenden Systems auch von der Anregung ab. Somit kann ein für eine Berechnung geeigneter Wert nicht notwendigerweise für eine ähnliche Berechnung mit anderer Anregung wiederverwendet werden. Hier wird der Wert des zulässigen Fehlers im Vorfeld aus den Ergebnissen einer bereits durchgeführten Berechnung ermittelt. Der Wert beträgt etwa 5,6 % des Mittelwerts der Systemantwort im betrachteten Frequenzbereich.

Tabelle 4.18.: Einstellungen zur Untersuchung des Einflusses des gewählten Validierungskriteriums

Validierungskriterium	Zulässiger Fehler
Einfache Differenz	$2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}^2$
Relative Differenz	0,3
Einfache Pegeldifferenz	6,0 dB
Mittlere Pegeldifferenz	3,0 dB
Bhattacharyya-Koeffizient	$\mathcal{N}^{\text{Ref}}(\mu^{\text{Ref}}, 0,2 \cdot \mu^{\text{Ref}}),$ $\mathcal{N}^{\text{MMV}}(\mu^{\text{MMV}}, 0,2 \cdot \mu^{\text{MMV}})$

Für das Validierungskriterium der *relativen Differenz* wird eine Abweichung der Systemantworten von 30 % an den Testpunkten toleriert. Ein wesentlicher Vorteil dieser relativen Größe ist die Unabhängigkeit von der tatsächlichen Systemantwort. Das Validierungskriterium kann somit auch bei Variationen der Anregung oder des Schwingungsverhaltens beibehalten werden. Gerade für die Verwendung in der Akustik bietet sich die Verwendung von Pegeldifferenzen als Validierungskriterium an. Daher wird die *einfache Pegeldifferenz* sowie die *mittlere Pegeldifferenz* untersucht. Aufgrund des den Pegel bildenden Logarithmus sind Pegeldifferenzen ebenfalls relative Größen und können somit unabhängig von der tatsächlichen Amplitude der Systemantworten verwendet werden. Für die einfache Pegeldifferenz wird eine Differenz der Systemantworten an den Testpunkten von 6,0 dB toleriert. Dies wird für jeden Testpunkt innerhalb einer Frequenzgruppe überprüft. Der Validierungsprozess ist nur dann erfolgreich, wenn die tolerierte Pegeldifferenz an allen Testpunkten eingehalten wird. Für die mittlere Pegeldifferenz wird ein Wert von 3,0 dB gewählt. Für dieses Validierungskriterium wird eine Pegelmittelung der Abweichungen der Systemantworten über die Testpunkte einer Frequenzgruppe durchgeführt. Somit kann eine große Abweichung an einem Testpunkt durch geringe Abweichungen an den verbleibenden Testpunkten kompensiert werden. Aufgrund dieser Ausgleichsmöglichkeit wird erwartet, dass dieses Kriterium geringere Anforderungen an die zu validierenden Modelle stellt als das Validierungskriterium der einfachen Pegeldifferenz. Daher wird der tolerierte Fehler geringer gewählt.

Als letztes Validierungskriterium wird der Bhattacharyya-Koeffizient untersucht. Dieses Kriterium betrachtet sowohl die Lösung des Referenzmodells als auch die mit dem zu validierenden Modell ermittelte Lösung als Realisierungen einer Zufallsvariable. Das Ziel dieser Zufallsvariablen besteht nicht in der Modellierung einer

physikalisch oder mathematisch motivierten Unsicherheit. Vielmehr ist es das Ziel, ein eher ingenieurmäßig motiviertes Validierungskriterium zu bieten. Das Konzept wird in Abschnitt 3.5.2 vorgestellt. Die Idee besteht darin, für Anwendungen in der Akustik ein Kriterium zu nutzen, welches weniger sensitiv auf die große Dynamik der Systemantwort schwach gedämpfter Systeme in der Nähe der Resonanzstellen reagiert. Dazu werden die Ergebnisgrößen der beteiligten Modelle als Zufallsvariablen modelliert, dies führt zu einem weniger strikten Vergleich. Der Bhattacharyya-Koeffizient ermittelt die Überlappung der zu den berechneten Ergebnisgrößen gehörenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Das zu validierende Modell wird als erfolgreich validiert eingestuft, sofern der Bhattacharyya-Koeffizient einen Wert größer 0,5 erreicht. Für die als Zufallsvariable modellierten, berechneten Systemantworten wird als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung von 20 % des berechneten Wertes der Systemantwort verwendet. Als Mittelwert der normalverteilten Zufallsvariable wird der berechnete Wert der Systemantwort verwendet.

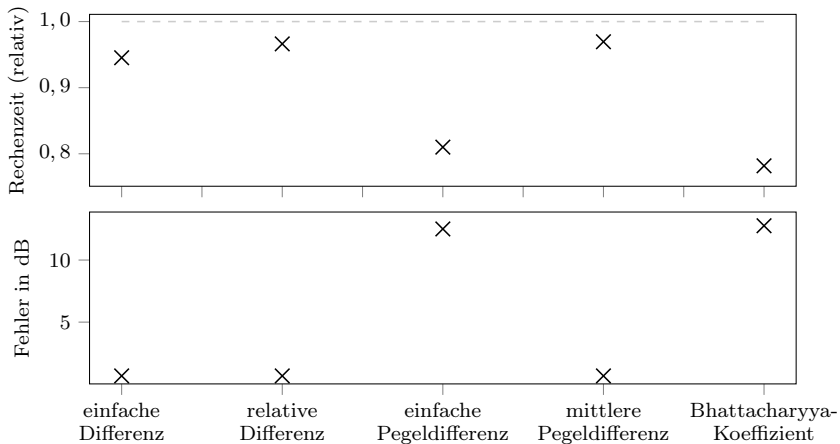


Abbildung 4.19.: Einfluss des gewählten Validierungskriteriums auf die Rechenzeit (oben) und den insgesamt resultierenden Fehler (unten)

Das Berechnungsergebnis ist in Abbildung 4.19 dargestellt. Im oberen Diagramm ist für jedes verwendete Validierungskriterium die erzielte Rechenzeit, relativ zu der für die direkte Lösung des Referenzmodells erforderlichen Rechenzeit, dargestellt. Die zur Lösung des Referenzmodells erforderliche Rechenzeit ist als gestrichelte Linie bei 1,0 markiert. Im unteren Diagramm ist der insgesamt resultierende Fehler für alle untersuchten Validierungskriterien aufgetragen. Die Rechenzeiterparnis bei Verwendung der Validierungskriterien einfache Differenz, relative Differenz und mittlerer Pegeldifferenz ist mit 3 – 5 % eher gering. Für diese Testfälle ist der insgesamt resultierende Fehler mit 0,67 dB ebenfalls gering. Bei Verwendung der Pe-

geldifferenz und dem Bhattacharyya-Koeffizienten als Validierungskriterium ist der Fehler mit 12,51 dB bzw. 12,67 dB deutlich größer, hier wird auch eine höhere Rechenzeitersparnis von 19 % bzw. 22 % erreicht.

Grundsätzlich ist zu erkennen, dass der insgesamt resultierende Fehler der berechneten Systemantwort mit der Rechenzeitersparnis positiv korreliert. Ein geringer resultierender Fehler korrespondiert mit einer geringen Rechenzeitersparnis. Analog führen große Fehler der berechneten Systemantwort auch zu größeren Rechenzeitersparnissen. Anhand der großen Unterschiede, sowohl in der erreichbaren Rechenzeitersparnis als auch des resultierenden Fehlers, ist zu erkennen, dass die Validierungskriterien nur bedingt vergleichbar sind. Die für die Validierungskriterien verwendeten, an den Testpunkten tolerierten Fehler werden mit dem Ziel gewählt, eine Vergleichbarkeit der Validierungskriterien zu ermöglichen.

Für das Validierungskriterium der einfachen Differenz wird der an den Testpunkten tolerierte Fehler zu $2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}^2$ gewählt. Dies entspricht einer relativen Differenz von 5,6 % der mittleren Amplitude der Systemantwort im gesamten Frequenzbereich. Demgegenüber erscheint die gewählte relative Differenz von 30 % als ein großer Wert. Allerdings weist die Systemantwort eine große Dynamik auf. Das gewählte Kriterium der einfachen Differenz entspricht daher für die Maximalamplitude der Systemantwort einer relativen Abweichung 0,057 %. Für die minimale Amplitude der Systemantwort entspricht die relativ tolerierte Abweichung hingegen 1.648 %. Für akustische Anwendungen ist eine hohe Dynamik der Systemantworten typisch, daher erscheint dieses Validierungskriterium nur bedingt geeignet. Dennoch ist das Berechnungsergebnis mit dem anhand der relativen Differenz erzielten Ergebnis vergleichbar.

Deutliche Unterschiede ergeben sich dagegen für die Nutzung der Pegeldifferenzen als Validierungskriterien. Es wird erwartet, dass die mittlere Pegeldifferenz ein weniger striktes Kriterium darstellt. Daher wird der tolerierte Fehler zu 3,0 dB gewählt. Demgegenüber wird für die einfache Pegeldifferenz ein größerer Fehler von 6,0 dB gewählt. Dennoch zeigt die Untersuchung in Abbildung 4.19, dass die gewünschte Vergleichbarkeit nicht eintritt. Entgegen der Erwartung erzielt die Berechnung mit der einfachen Pegeldifferenz einen deutlich größeren Fehler und eine entsprechend größere Rechenzeitersparnis als die Nutzung der mittleren Pegeldifferenz. Hier hat somit die Wahl des tolerierten Fehlers an den Testpunkten einen großen Einfluss auf das resultierende Berechnungsergebnis.

Auch bei Verwendung des Bhattacharyya-Koeffizienten als Validierungskriterium wird eine große Rechenzeitersparnis und ein großer, insgesamt resultierender Fehler erzielt. Der Grund hierfür ist die Betrachtung sowohl der Referenzlösung als auch der Lösung der vereinfachten Modelle als Zufallsvariable und dem Vergleich der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Dadurch wird insgesamt eine eher geringe Anforderung an die Ergebnisqualität der vereinfachten Modelle gestellt, die Idee des „weichen“ Vergleichs wird erreicht.

4.4.4. Einfluss des zulässigen Fehlers an den Testpunkten

Neben der Anzahl der verwendeten, vereinfachten Modelle ist für den Anwender die Vorgabe des an den Testpunkten zulässigen Fehlers ein wesentlicher Einstellungsparameter. Diese Einstellung ist, wie die vorherige Untersuchung zeigt, eine für das Berechnungsergebnis wesentliche Größe. Sie definiert das Validierungskriterium. Es wird erwartet, dass bei Vergrößerung des zulässigen Fehlers die vereinfachten Modelle häufiger eingesetzt werden können. Dadurch wird eine größere Rechenzeiterparnis bei gleichzeitiger Erhöhung des insgesamt resultierenden Fehlers erreicht. Dieses Verhalten wird bei einigen der vorgestellten Untersuchungen punktuell bereits beobachtet. Nachfolgend wird dieser Einfluss durch eine systematische Erhöhung des an den Testpunkten zulässigen Fehlers hinsichtlich des insgesamt resultierenden Fehlers und der erforderlichen Rechenzeit untersucht. Dazu wird als Validierungskriterium exemplarisch die mittlere Pegeldifferenz verwendet. Die untersuchten Werte der zulässigen, mittleren Pegeldifferenz sind $\Pi^{\text{MPD}} = \{0,5; 1,0; 2,0; \dots; 10,0\}$ dB. In Abbildung 4.20 ist im oberen Diagramm mit Kreuzen die erzielte Rechenzeit relativ zur direkten Berechnung des Referenzmodells über dem an den Testpunkten zulässigen Fehler aufgetragen. Zusätzlich ist die für die Lösung mit dem Referenzmodell erforderliche Rechenzeit als horizontale, gestrichelte Linie bei 1,0 und eine Regressionsgerade eingetragen. Im unteren Diagramm ist das Fehlermaß Ψ des insgesamt für die Systemantwort resultierenden Fehlers der Berechnung über dem an den Testpunkten zulässigen Fehler dargestellt. Hier ist ebenfalls eine Regressionsgerade eingetragen.

Es ist zu erkennen, dass die Erwartung grundsätzlich bestätigt wird. Durch einen größeren, zulässigen Fehler nimmt die erforderliche Rechenzeit ab. Dabei wird für das betrachtete Beispiel ab einem zulässigen Fehler von $\Pi^{\text{MPD}} = 1,0$ dB eine Rechenzeiterparnis erreicht. Wird der zulässige Fehler nochmals reduziert, so nimmt die erforderliche Rechenzeit weiter zu. Das Multi-Modell-Verfahren benötigt dann mehr Rechenzeit als die direkte Berechnung mit dem Referenzmodell. Die Regressionsgerade zeigt die näherungsweise lineare Abnahme der erforderlichen Rechenzeit mit zunehmendem Fehler an. Die anhand der Regression ermittelte, theoretische relative Rechenzeit für einen zulässigen Fehler von 0,0 dB liegt bei 99 %. Somit konvergiert das entwickelte Verfahren für verschwindenden Fehler näherungsweise gegen die direkte Berechnung mit dem Referenzmodell. Es sei hier darauf hingewiesen, dass die ermittelten Rechenzeiten Realisierungen der zugehörigen Zufallsvariablen sind. Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 4.4.2 vorgestellten Unsicherheit der Rechenzeit von 4,6 % für die einfache Standardabweichung kann somit die Regressionsgerade als gerechtfertigt betrachtet werden. Anhand der unteren Darstellung ist zu erkennen, dass mit zunehmendem tolerierten Fehler an den Testpunkten auch der tatsächliche Fehler der approximierten Lösung zunimmt. Der resultierende Fehler ist für einen an den Testpunkten tolerierten Fehler von 0,5 dB mit $\Psi = 0,56$ dB minimal und nimmt für fast alle größeren tolerierten Fehler an den Testpunkten zu. Eine Ausnahme bildet hier die Auswertung für einen tolerierten Fehler an den Testpunkten von 3,0 dB. Hier wird ebenfalls ein sehr kleiner Fehler von $\Psi = 0,67$ dB erreicht. Entsprechend

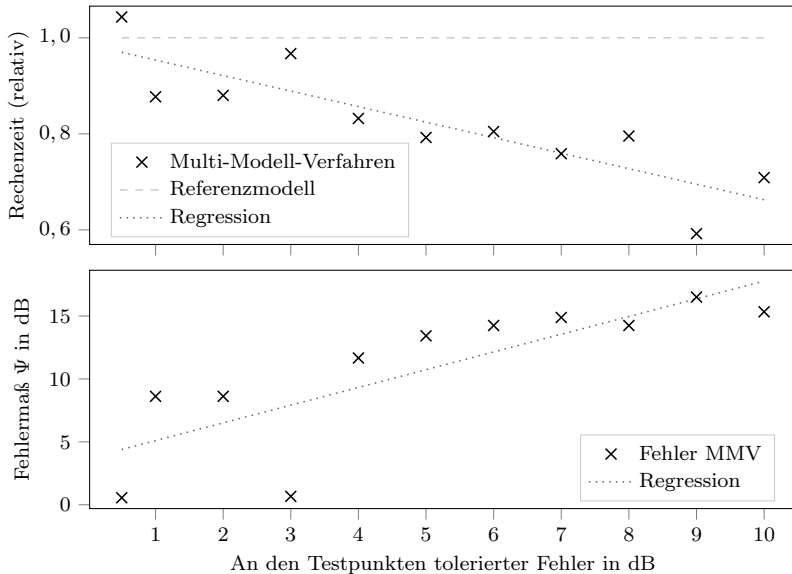


Abbildung 4.20.: Einfluss des an den Testpunkten zulässigen Fehlers auf die Rechenzeit (oben) und den insgesamt resultierenden Fehler (unten)

sind auch die resultierenden Rechenzeiten für diese Varianten größer als für die Untersuchungen mit größerem tolerierten Fehler an den Testpunkten. Insgesamt zeigt diese Untersuchung, dass das Verfahren eine Abwägung zwischen der erforderlichen Rechenzeit und dem resultierenden Fehler der approximierten Lösung ermöglicht. Der Anwender des Verfahrens kann somit den Fokus auf eine genaue Lösung mit geringerer Rechenzeiterparnis legen oder eine weniger genaue Lösung mit großer Rechenzeiterparnis erreichen.

4.5. Fazit der Verifikationsuntersuchungen

In diesem Kapitel wird das entwickelte Multi-Modell-Verfahren verifiziert. Dabei werden zunächst verschiedene Testfälle betrachtet, die die Ableitung vereinfachter Modelle aus dem Referenzmodell untersuchen. Die einzelnen Testfälle zielen jeweils auf eine Abstraktionsebene im Rahmen des Modellierungsprozesses ab. Dabei führt die Variation des Modells auf jeder dieser Abstraktionsebenen letztlich zu reduzierten numerischen Modellen, die gemeinsam mit dem Referenzmodell verwendet werden. Dabei wird zunächst die Ableitung vereinfachter numerischer Modelle durch Variation der Diskretisierung sowie durch Nutzung analytischer Lösungen untersucht. Das numerische Modell wird aus dem mathematischen Modell abgeleitet.

Daher wird im nächsten Schritt die Vereinfachung auf Basis des mathematischen Modells getroffen. Als Beispiele werden die Variation der Elementformulierung sowie die Verwendung eines vereinfachten Materialmodells untersucht. Auf der Ebene höchsten Abstraktionsgrades wird abschließend untersucht, inwieweit sich auf Basis eines variierten Realitätsmodells abgeleitete, vereinfachte Modelle mit dem Multi-Modell-Verfahren nutzen lassen. Neben diesen Untersuchungen werden weitere Eigenschaften des Verfahrens untersucht. Diese Untersuchungen richten den Blick auf die Anwendung des Verfahrens, da sie in direktem Zusammenhang mit den durch den Anwender zu treffenden Entscheidungen stehen. Dabei wird zunächst der Einfluss der Anzahl vereinfachter Modelle betrachtet und die Auswirkungen des zufallsbasierten, vorzeitigen Abbruchs des Validierungsprozesses untersucht. Weiterhin wird der Einfluss des gewählten Validierungskriteriums und des zulässigen Fehlers an den Testpunkten untersucht.

Der intuitivste Anwendungsfall des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens besteht in der Ableitung vereinfachter Modelle durch Variation der Diskretisierung. Dieser Fall wird in Abschnitt 4.1.1 untersucht. Das Verfahren ist in diesem Fall ähnlich zu existierenden Multi-Level-Verfahren. Im ersten Beispiel wird die Schwingschnelle einer durch eine Punktkraft angeregten Fensterscheibe, also ein Beispiel aus dem Bereich des Körperschalls, betrachtet. Das Referenzmodell ist im gesamten, interessierenden Frequenzbereich einsetzbar. Die vereinfachten Modelle können in Teilbereichen des Frequenzbereichs eingesetzt werden. Das entwickelte Multi-Modell-Verfahren validiert die vereinfachten Modelle gegen das Referenzmodell und setzt, bei erfolgreicher Validierung, die vereinfachten Modelle anstelle des Referenzmodells ein. Die Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle entsprechen näherungsweise den anhand der verwendeten Diskretisierung erwarteten Frequenzbereichen. Durch die Nutzung der vereinfachten Modelle wird eine Rechenzeiterparnis von bis zu 11 % erzielt. Das Berechnungsergebnis ist eine Näherung der anhand des Referenzmodells ermittelten Referenzlösung, der insgesamt resultierende Fehler ist klein. Neben dem Beispiel aus dem Gebiet des Körperschalls wird weiterhin mit der Berechnung des Schalldrucks in einem Impedanzrohr eine Untersuchung aus dem Bereich des Luftschalls vorgestellt. Hier wird ebenfalls die Diskretisierung zur Ableitung der vereinfachten Modelle variiert. Auch in diesem Beispiel werden die vereinfachten Modelle durch das entwickelte Multi-Modell-Verfahren jeweils näherungsweise in dem Frequenzbereich eingesetzt, der anhand der verwendeten Diskretisierungen erwartet wird. Das Verfahren erzielt auch in diesem Fall eine Näherungslösung mit einem geringen Fehler. Gegenüber der Untersuchung aus dem Bereich des Körperschalls ist die erzielte Rechenzeiterparnis mit bis zu 44 % deutlich größer. Der Grund ist hier die Abhängigkeit der aufzulösenden Wellenlängen von der Frequenz. Die Wellenlänge der für Luftschallberechnungen aufzulösenden Longitudinalwellen ist umgekehrt proportional zur Frequenz. Demgegenüber ist die Biegewellenlänge für das Beispiel aus dem Körperschall umgekehrt proportional zur Wurzel der Frequenz. Bei einer Vergrößerung der Elementkantenlänge nimmt daher der mögliche Einsatzbereich der so erzeugten, vereinfachten Modelle für durch Biegewellen dominierte Probleme schneller ab als für durch Longitudinalwellen dominierte Probleme. Das

entwickelte Multi-Modell-Verfahren ist somit, bei Variation der Diskretisierung zur Ableitung vereinfachter Modelle, für Berechnungen der Akustik grundsätzlich geeignet. Für durch Longitudinalwellen dominierte Fragestellungen werden allerdings bessere Ergebnisse erzielt. Als drittes Beispiel der Ableitung vereinfachter Modelle durch Variation des numerischen Modells wird, als Alternative zur FEM, die Nutzung analytischer Formulierungen zur Lösung der modellierten Differentialgleichungen untersucht. Auch für diesen Anwendungsfall kann eine Rechenzeiterparnis in Verbindung mit einem geringen Fehler der Approximation erreicht werden. Die in Abschnitt 1.3 vorgestellte Hypothese Nummer 1 postuliert die Möglichkeit, ohne unzulässigen Genauigkeitsverlust und unterhalb der höchsten, interessierenden Frequenz vereinfachte Modelle mit dem Ziel der Reduktion des Berechnungsaufwandes einsetzen zu können. Diese Hypothese wird durch die vorgestellten Untersuchungen insofern bestätigt, als mit einem geringen resultierenden Fehler und mit einer positiven Rechenzeiterparnis Näherungslösungen der Referenzlösung berechnet werden können. Weiterhin bestätigen die Untersuchungen die Hypothese Nummer 2. Diese Hypothese postuliert die Möglichkeit das Verfahren, basierend auf einem Validierungsprozess, automatisiert zu gestalten. Diese Hypothese wird insofern bestätigt, als der gewählte Validierungsprozess die Einsetzbarkeit der vereinfachten Modelle sicher überprüft und die Modelle so einsetzt, dass eine Rechenzeiterparnis in Verbindung mit einem geringen Fehler erzielt werden kann.

Neben der Untersuchung der Variation der Diskretisierung wird in den weiteren vorgestellten Beispielen in Abschnitt 4.2 die Ableitung vereinfachter Modelle durch Variation des mathematischen Modells untersucht. Die Variation des mathematischen Modells erfolgt durch Variation der berücksichtigten Differentialgleichungen. Im ersten vorgestellten Beispiel wird dazu die Elementformulierung und damit der Satz der berücksichtigten Differentialgleichungen variiert. Für das Referenzmodell werden Volumenelemente verwendet. Das vereinfachte Modell verwendet Plattenelemente zur Modellierung einer schwingenden Aluminiumplatte. Als zweites Beispiel wird das zur Modellierung von porösem Material verwendete Materialmodell variiert. Dabei kommt für das Referenzmodell das Modell von BIOT zur Anwendung. Dieses Modell berücksichtigt die Schallausbreitung in dem porösen Material durch Modellierung von drei Wellentypen. Das vereinfachte Modell berücksichtigt nur einen Wellentyp. Bei identischer Diskretisierung sind für das Referenzmodell vier FHG je Elementknoten erforderlich, demgegenüber erfordert das vereinfachte Modell aufgrund der Reduktion der verwendeten Gleichungen nur einen FHG je Knoten. Daher führt die Variation des Materialmodells ebenfalls zu einer Reduktion des numerischen Modells. Beide Beispiele erzielen eine Reduktion der erforderlichen Rechenzeit. Dabei wird eine Approximation der Referenzlösung mit einem nur geringen Fehler erreicht. Somit bestätigen auch diese Beispiele die Hypothesen Nummer 1 und Nummer 2.

Hypothese Nummer 3 postuliert, neben der Variation des numerischen und des mathematischen Modells, als dritte Möglichkeit zur Ableitung vereinfachter Modelle die Variation des Realitätsmodells. Das Realitätsmodell ist die durch einen Beobachter rezipierte Realität. In diesem Schritt des Modellierungsprozesses werden wesentliche

Aspekte der Modellierung festgelegt. Dies sind beispielsweise die zu verwendenden Randbedingung und Lasten. Außerdem wird festgelegt, welche Teile einer zu berechnenden Geometrie berücksichtigt werden. Das vorgestellte Beispiel erzielt eine Reduktion des vereinfachten Modells durch Vernachlässigung eines Teiles der zu berechnenden Geometrie. Dabei wird für eine zu berechnende Doppelverglasung das eingeschlossene Gasvolumen für das Referenzmodell modelliert, für das vereinfachte Modell jedoch vernachlässigt. Die Anwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens auf dieses Beispiel führt ebenfalls zu einer Approximation der Referenzlösung mit einem geringen Fehler. Allerdings ist die erzielte Rechenzeiterparnis negativ, das Multi-Modell-Verfahren erfordert mehr Rechenzeit als die direkte Lösung des Referenzmodells. Der Grund ist hier, dass die erzielte Reduktion des vereinfachten Modells nicht ausreichend ist. Die Ersparnis wird durch die erforderlichen Validierungsprozesse überkompensiert. Insofern kann Hypothese Nummer 3 nur teilweise bestätigt werden. Die Variation des Realitätsmodells führt hier nicht zu einem verringerten Berechnungsaufwand. Diese Erkenntnis ist allerdings auf die vorgestellte Untersuchung beschränkt und kann nicht notwendigerweise verallgemeinert werden.

Neben der Ableitung vereinfachter Modelle auf Basis der Abstraktionsebenen des Modellierungsprozesses werden in Abschnitt 4.4 weiterhin einige für die Anwendung des Verfahrens relevante Eigenschaften untersucht. Das entwickelte Multi-Modell-Verfahren setzt bereits existierende vereinfachte Modelle voraus. Diese müssen zusätzlich zu dem zu lösenden Referenzmodell durch den Anwender erzeugt werden. Daher beginnt die Untersuchung der Eigenschaften des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens mit der Betrachtung des Einflusses der Anzahl vereinfachter Modelle. Zusätzlich zu einem Referenzmodell werden in dieser Untersuchung zwischen einem und sechs vereinfachte Modelle verwendet. Es wird erwartet, dass die Rechenzeiterparnis mit zunehmender Anzahl vereinfachter Modelle zunimmt, da für zunehmend viele Frequenzbereiche das jeweils effizienteste Modell verwendet werden kann. Diese Erwartung wird nicht bestätigt. Die Rechenzeiterparnis ist bis zu einer Anzahl von vier vereinfachten Modellen nahezu konstant. Für mehr als vier vereinfachte Modelle verschwindet die Rechenzeiterparnis, das Multi-Modell-Verfahren erfordert mehr Rechenzeit als die direkte Lösung des Referenzmodells.

Weiterhin wird der Einfluss des Konzepts der zufallsbasierten Abbruchentscheidung des Validierungsprozesses untersucht. Dieses Konzept wird verwendet, um eine höhere Rechenzeiterparnis zu erreichen. Die Berechnung schreitet von niedrigen zu hohen Frequenzen fort. Dabei wird die Entscheidung, ob ein weiterer Validierungsprozess bei einer höheren Frequenz durchgeführt wird, zufallsbasiert getroffen. Die zugehörige Zufallsvariable ist so gestaltet, dass die Entscheidung für einen weiteren Validierungsprozess unwahrscheinlicher wird, je mehr Validierungsprozesse zu dem Zeitpunkt der Berechnung für das zu validierende Modell bereits erfolglos waren. Aufgrund dieses Verfahrens wird das Berechnungsergebnis des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens unsicherheitsbehaftet. Um diese Unsicherheit zu quantifizieren, wird eine Berechnung einhundertmal wiederholt und die erzielte Rechenzeit ermittelt. Für die durchgeführte Untersuchung wird eine relative Standardabweichung von 4,6 % ermittelt. Somit müssen alle in der vorliegenden Arbeit angegebenen Re-

chenzeiten als unsicherheitsbehaftet betrachtet werden. In den meisten betrachteten Fällen ist die erzielte Rechenzeiterparnis jedoch größer als die statistisch ermittelte Unsicherheit der Rechenzeit. Daher kann erwartet werden, dass das Verfahren in den meisten Fällen eine Rechenzeiterparnis sicherstellt.

Die Untersuchungen zu den Eigenschaften des Verfahrens werden durch Betrachtungen zu den durch den Anwender wählbaren Validierungskriterien und des zugehörigen, zulässigen Fehlers an den Testpunkten abgerundet. Dabei wird einerseits untersucht, welchen Einfluss die wählbaren Validierungskriterien auf das Berechnungsergebnis haben. Dazu wird der an den Testpunkten zulässige Fehler möglichst vergleichbar eingestellt. Es zeigt sich, dass die Nutzung einer einfachen Differenz als Validierungskriterium für Anwendungen in der Akustik nur bedingt geeignet ist. Für Anwendungen in der Akustik sind relative Größen wie die relative Differenz, die einfache und die mittlere Pegeldifferenz besser geeignet. Eine weitere Alternative wird durch die Wahl des Bhattacharyya-Koeffizienten ermöglicht. Dieser betrachtet sowohl die Systemantwort des Referenzmodells als auch das Berechnungsergebnis der vereinfachten Modelle als unsicherheitsbehaftet. Dadurch wird ein Kriterium erhalten, welches weniger sensitiv auf die hohe Dynamik der für Anwendungen in der Akustik typischen Systemantworten reagiert. Entsprechend stellt dieses Validierungskriterium die geringsten Anforderungen an die vereinfachten Modelle. In dieser Untersuchung wird mit dem Anstieg der Rechenzeiterparnis bei zunehmendem resultierenden Fehler bereits eine wesentliche Eigenschaft des Verfahrens deutlich. Diese Eigenschaft wird in der letzten Untersuchung ausführlich betrachtet.

Eine wesentliche Einstellmöglichkeit für den Anwender liegt in der Abwägung zwischen einer möglichst genauen Approximation der Referenzlösung und einer möglichst großen Rechenzeiterparnis. Dazu wird in der letzten Untersuchung für ein gewähltes Validierungskriterium der an den Testpunkten tolerierte Fehler systematisch erhöht. Dabei zeigt sich, dass mit zunehmendem, an den Testpunkten tolerierten Fehler auch der insgesamt erzielte Fehler der berechneten Systemantwort zunimmt. Gleichzeitig nimmt die erforderliche Rechenzeit ab. Für einen verschwindenden tolerierten Fehler verschwindet näherungsweise sowohl der insgesamt erzielte Fehler als auch die Rechenzeiterparnis. Somit ermöglicht die Wahl des an den Testpunkten tolerierten Fehlers die Einstellung zwischen einer genauen Berechnung mit geringer Rechenzeiterparnis und einer groben Approximation mit hoher Rechenzeiterparnis.

Insgesamt zeigen die vorgestellten Verifikationsuntersuchungen die Fähigkeit des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens, die Systemantwort eines Referenzmodells durch Hinzunahme vereinfachter Modelle zu approximieren. Die Eignung der vereinfachten Modelle wird durch einen Validierungsprozess zur Laufzeit überprüft, insgesamt wird eine Rechenzeiterparnis erreicht. Die Ableitung vereinfachter numerischer Modelle kann auf allen Ebenen des Modellierungsprozesses erfolgen. Die Genauigkeit der Approximation kann durch den Anwender bestimmt werden. Das wesentliche Ziel der Arbeit ist damit erreicht.

5. Anwendung des Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung

Das entwickelte Multi-Modell-Verfahren lässt sich, wie im vorherigen Kapitel gezeigt, zur Beschleunigung einer einzelnen Berechnung einsetzen. Dabei wird in den meisten Anwendungsfällen eine Rechenzeiterparnis erzielt. Die Ersparnis hängt maßgeblich von der Qualität der vereinfachten Modelle und dem Umfang des Einsatzes anstelle des Referenzmodells im Frequenzbereich ab. Die maximal erzielbare Rechenzeiterparnis wird nicht erreicht, da der durch die Nutzung der vereinfachten Modelle verringerte Berechnungsaufwand durch zusätzlich erforderliche Validierungsprozesse teilweise kompensiert wird. Nach der ersten Berechnung sind die Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle bekannt. Dieses Wissen kann bei Wiederholung der Berechnung wiederverwendet werden. In Abschnitt 3.6 wird bereits der Einsatz des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zur Nutzung in stochastischen Untersuchungen im Rahmen der Unsicherheitsquantifizierung erwähnt. Im Bereich der Unsicherheitsquantifizierung nutzen einige Methoden eine vielfache Auswertung der zu untersuchenden Modelle. Bei der Monte Carlo-Simulation zur Unsicherheitsquantifizierung wird jeder Eingangsparameter, beispielsweise Materialparameter, als Zufallsvariable modelliert. Somit wird auch die Ausgangsgröße der Berechnung zu einer Zufallsvariable. Für jede Modellauswertung wird für alle Eingangsparameter eine Realisierung der zugehörigen Zufallsvariable verwendet. Aus allen Realisierungen der Zufallsvariable der Ausgangsgröße werden die interessierenden Ergebnisgrößen bestimmt. Dies sind typischerweise die Momente der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Ein ähnliches Verfahren wird im Rahmen der varianzbasierten globalen Sensitivitätsanalyse verwendet. Dazu werden die Eingangsparameter der Berechnung stochastisch mittels der Monte Carlo-Methode oder, unter Verwendung deterministischer Zahlenfolgen wie beispielsweise der SOBOL-Sequenz, mittels der Quasi Monte Carlo-Methode ermittelt. Aus den Realisierungen der Ergebnisgröße werden die interessierenden Sensitivitätskoeffizienten ermittelt.

Das vorgestellte Multi-Modell-Verfahren lässt sich zur Beschleunigung derartiger stochastischer Untersuchungen nutzen. Dazu wird vorausgesetzt, dass die bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle im Frequenzbereich durch die Variation der Eingangsparameter nicht unzulässig beeinflusst werden. Dieser Ansatz wird in Hypothese Nummer 4 in Abschnitt 1.3 postuliert. Aufgrund dieser Annahme können bei jeder folgenden Berechnung die Validierungsprozesse der vereinfachten Modelle übersprungen werden. Der dafür erforderliche Berechnungsaufwand entfällt. Die mögliche Rechenzeiterparnis wird insgesamt vergrößert. Dieser Vorteil wird vor allem dann relevant, wenn sehr viele Modellaus-

wertungen, wie bei stochastischen Untersuchungen, erforderlich sind. In diesem Fall ähnelt das vorgestellte Multi-Modell-Verfahren der in [105] als *Filterung* bezeichneten Art möglicher Modell-Management-Strategien. Dabei wird durch die Modell-Management-Strategie entschieden, welches der zur Verfügung stehenden Modelle eingesetzt wird. Dies erfolgt im vorliegenden Fall bei der ersten Berechnung, alle weiteren Berechnungen nutzen diese Information zur Beschleunigung des Verfahrens.

In den folgenden Abschnitten wird das entwickelte Multi-Modell-Verfahren in Abschnitt 5.2 zur Unsicherheitsquantifizierung der Ausgangsgröße mittels der Monte Carlo-Methode und in Abschnitt 5.3 zur globalen Sensitivitätsanalyse mittels des Verfahrens nach SALTELLI verwendet [112]. Für beide Untersuchungen wird das Modell einer doppelschaligen Wand verwendet. Das Modell ist in Abschnitt 5.1 ausführlich beschrieben. Berechnet wird das Schalldämm-Maß der Wand bei Anregung mit einer ebenen Luftschallwelle.

5.1. Modellbeschreibung

Für die Anwendungen des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung wird in diesem Kapitel das Schalldämm-Maß einer einfachen, doppelschaligen Wand berechnet. Das Berechnungsverfahren orientiert sich dabei an dem in [43] vorgestellten Verfahren. Danach ist das Schalldämm-Maß \mathcal{R} definiert als der zehnfache, dekadische Logarithmus des Quotients der auf die Wand auftreffenden Schallleistung P_{ein} und der durch die Wand transmittierten Schallleistung P_{trans} entsprechend Gleichung (5.1). Das Verhältnis der auftreffenden und transmittierten Leistung wird durch den Transmissionsgrad $\tau = P_{\text{trans}}/P_{\text{ein}}$ charakterisiert.

$$\mathcal{R} = 10 \lg \frac{P_{\text{ein}}}{P_{\text{trans}}} \text{ dB} = 10 \lg \frac{1}{\tau} \text{ dB} \quad . \quad (5.1)$$

Die Wand wird in diesem Beispiel mit einer ebenen Luftschallwelle belastet. Dieses Verfahren unterscheidet sich damit von dem in [43] angegebenen Verfahren. Es werden somit auch andere Werte des Schalldämm-Maßes erhalten. Für die korrekte Ermittlung des Schalldämm-Maßes wäre eine Anregung der Wand mit einem diffusen Luftschallfeld erforderlich. Für die Anwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens ist dieser Unterschied jedoch unerheblich. Die auf die Wand auftreffende Schallleistung wird in diesem Beispiel aus der Amplitude p' der auf die Wand auftreffenden, ebenen Luftschallwelle ermittelt nach [95]:

$$P_{\text{ein}} = \frac{p'^2}{\rho_0 c} A_{\text{Wand}} \quad . \quad (5.2)$$

In Gleichung (5.2) ist ρ_0 die Luftdichte unter Normalbedingungen und c die Schallgeschwindigkeit. Die Fläche der Wand wird durch die Größe A_{Wand} repräsentiert.

Die Berechnung der auftretenden Schallleistung erfolgt in dieser Untersuchung anhand des Nominalwertes (für $T = 293,15 \text{ K}$) mit der Luftdichte $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Die durch die Wand transmittierte und auf der, der Anregungsseite gegenüberliegenden, Wandseite abgestrahlte Schallleistung P_{trans} wird in diesem Berechnungsbeispiel mittels des RAYLEIGH-Integrals aus der ortsabhängigen Schwingschnelle der Wand berechnet. Dazu werden die Gleichungen (2.26) und (2.27) verwendet.

5.1.1. Geometriemodell und verwendete Diskretisierung

Die Geometrie der zur berechnenden doppelschaligen Wand ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Wand besteht aus einer vorderen und einer hinteren Wandschale sowie dem eingeschlossenen Luftvolumen. Alle Bestandteile der Wand sind in grau markiert. Die Abmessungen der Wand sind $1,2 \text{ m}$ in der Breite sowie $0,9 \text{ m}$ in der Höhe. Es handelt sich hier um eine vereinfachte, sehr kleine Wand, wie sie beispielsweise in einem Fensterprüfstand getestet werden könnte. Der Grund für die geringen Abmessungen ist der Berechnungsaufwand zur Lösung des entstehenden FEM-Gleichungssystems. Die Monte Carlo-Simulation für die durchzuführende Unsicherheitsquantifizierung erfordert sehr viele Modellauswertungen. Daher wird der Berechnungsaufwand für eine einzelne Modellauswertung möglichst minimiert. Dies erfolgt hier durch eine Reduktion der Abmessungen der zu berechnenden Geometrie. Somit ist die Anzahl der erforderlichen finiten Elemente geringer. Das resultierende numerische Modell erfordert weniger Aufwand zur Lösung. Die Dicke der doppelschaligen Wand beträgt insgesamt $0,07 \text{ m}$, die Wandschalen sind jeweils $d_{\text{Wandschale}} = 0,0125 \text{ m}$ dick.

Der Übersichtlichkeit halber sind in Abbildung 5.1 die Einzelteile der Wand separiert dargestellt, in dem Berechnungsmodell sind jeweils die vordere und die hintere Wandschale mit dem Luftvolumen gekoppelt. Die vordere Wandschale wird durch die ebene Luftschallwelle belastet. Die ebene Luftschallwelle wirkt dabei wie eine harmonische Flächenkraft phasengleich auf alle Orte der Wand. Die Schallabstrahlung der hinteren Wandschale in das Freifeld wird, wie bereits erwähnt, mittels des RAYLEIGH-Integrals berechnet. Die Bereiche vor der vorderen Wandschale sowie hinter der hinteren Wandschale werden daher für die FEM-Berechnung nicht modelliert. Die Wandschalen werden mit 9-Knoten Schalenelementen diskretisiert, die Diskretisierung des Luftvolumens verwendet 27-Knoten Hexaeder-Elemente. Die höchste zu berechnende Frequenz beträgt in diesem Beispiel 1.500 Hz . Die Biegewellenlänge der Wandschalen beträgt bei dieser Frequenz $\lambda_B \approx 0,16 \text{ m}$, die Wellenlänge der Luftschallwellen in dem Luftvolumen beträgt $\lambda_L \approx 0,23 \text{ m}$. Für die Wahl der Diskretisierung ist die kürzere Wellenlänge relevant. Als Elementkantenlänge wird daher $\beta^{\text{Ref}} = 0,06 \text{ m}$ für das Referenzmodell gewählt. Die Diskretisierung erzielt somit für die höchste zu berechnende Frequenz eine Auflösung von etwa 6 Knoten je Biegewellenlänge. Insgesamt verwendet das so diskretisierte Referenzmodell 19.065 FHG mit je 300 Elementen für die Wandschalen und das Luftvolumen sowie 600 Verbindungselemente an den Grenzflächen der Wandschalen und dem Luftvolumen.

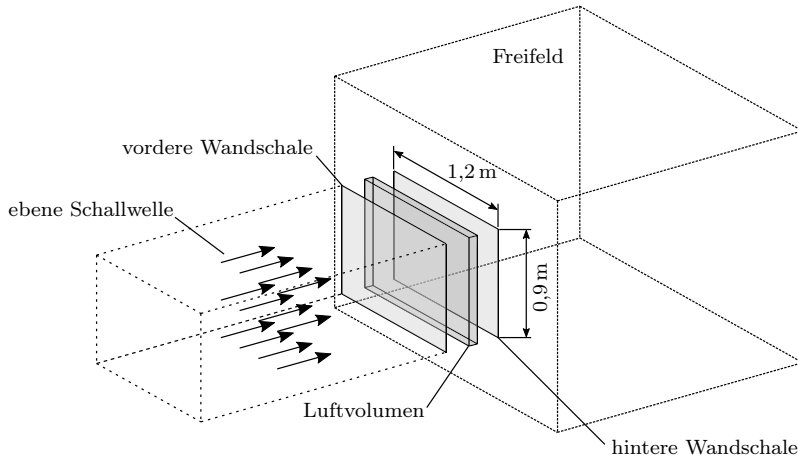


Abbildung 5.1.: Geometrie der doppelschaligen Wand zur Unsicherheitsquantifizierung. Wand bestehend aus Wandschalen und Luftvolumen. Die Gebiete vor der Wand (auftreffende Welle) und hinter der Wand (Freifeld) werden nicht modelliert. Erzeugung der vereinfachten Modelle durch Variation des numerischen Modells. Anregung durch ebene Schallwelle. Berechnung der Schallabstrahlung in Freifeld.

5.1.2. Modellparameter

Nachfolgend werden die Parameter der Modellierung beschrieben. Alle Daten sind auch in Tabelle 5.1 angegeben. Die berechnete, doppelschalige Wand modelliert eine Gipskarton-Ständerwand. Die aus Gipskartonplatten bestehenden Wandschalen werden als ebene, homogene Platten modelliert. Dazu wird ein homogenes, isotropes, viskoelastisches Materialmodell verwendet. Ständer und Befestigungen werden geometrisch nicht modelliert, ihr Einfluss wird durch eine Dämpfung vereinfachend berücksichtigt. Der Zwischenraum der Wandschalen ist mit Luft gefüllt. Als Materialparameter für die Wandschalen (Abkürzung: WS, siehe Tabelle 5.1) werden E-Modul, Dichte und die Poisson-Zahl sowie die Dämpfung berücksichtigt. Die den Zwischenraum der Wände füllende Luft (Abkürzung: LV, siehe Tabelle 5.1) wird als homogenes, isotropes Fluid mit den Materialparametern Luftdichte und die Schallgeschwindigkeit modelliert. Als unsichere Parameter werden für die Wandschalen der E-Modul und die Dichte sowie für die Luft die Luftdichte und Schallgeschwindigkeit der Luft berücksichtigt. Für die Unsicherheitsquantifizierung mit der Monte Carlo-Simulation werden die Zufallsvariablen der Parameter als log-normalverteilt angenommen. Die Verwendung der log-Normalverteilung stellt die Ziehung ausschließlich positiver Werte während der Monte Carlo-Simulation sicher. Die globale Sensitivitätsanalyse verwendet eine Gleichverteilung. Die verbleibenden Parameter werden nicht als unsicher betrachtet. Für den E-Modul wird ein Mittelwert

von $1,7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ verwendet. Die für die Berechnungen angenommene Standardabweichung des E-Moduls beträgt 5 % des Mittelwerts, also $85 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$. Neben dem E-Modul wird die Dichte der Wandschalen als unsicherheitsbehaftet betrachtet. Für den Mittelwert wird eine Dichte von 696 kg/m^3 mit einer Standardabweichung von $34,8 \text{ kg/m}^3$ verwendet. Auch hier beträgt die Standardabweichung 5 % des Mittelwerts. Die unsicheren Parameter der den Zwischenraum der Wandschalen füllenden Luft sind die Luftdichte und die Schallgeschwindigkeit. Diese Parameter hängen jeweils von der Lufttemperatur ab, sie sind somit korreliert. Eine unabhängige Modellierung der Parameter als Zufallsvariable ist daher nicht sinnvoll. Stattdessen wird für die durchzuführende Monte Carlo-Simulation die Lufttemperatur als Zufallsvariable modelliert. Die für die Berechnung erforderlichen Werte der Luftdichte und der Schallgeschwindigkeit werden aus den Realisierungen der Lufttemperatur berechnet. Die Luftdichte ρ_0 hängt von der absoluten Lufttemperatur T ab nach [119]:

$$\rho_0 = \frac{p_{\text{Luft}}}{R_S T} \quad . \quad (5.3)$$

Darin ist p_{Luft} der Umgebungsluftdruck, dieser wird hier zu $1.013,25 \text{ hPa}$ angenommen. Die Größe R_S ist die spezifische Gaskonstante mit $R_S = 287,058 \text{ J/(kg K)}$. Die Schallgeschwindigkeit wird aus der absoluten Lufttemperatur T , der spezifischen Gaskonstante R_S und dem Adiabatenexponent $\kappa = 1,402$ nach [119] berechnet:

$$c = \sqrt{\kappa R_S T} \quad . \quad (5.4)$$

In den Gleichungen (5.3)-(5.4) wird nur die absolute Lufttemperatur T als unsicher betrachtet. Als Mittelwert wird $T = 293,15 \text{ K} \cong 20^\circ \text{C}$ verwendet. Die Standardabweichung wird zu $5,0 \text{ K}$ festgelegt.

Neben den Materialparametern E-Modul und Dichte der Wandschalen, der absoluten Temperatur und den daraus abgeleiteten Werten der Dichte und der Schallgeschwindigkeit der Luft wird noch die Dämpfung der Wandschalen benötigt. In diesem Beispiel wird ein Wert von $\eta = 0,1$ verwendet. Der Grund für diesen eher hohen Wert ist einerseits die erwartete hohe Dämpfung des Materials der Wandschalen und andererseits der Einfluss hier nicht modellierter Befestigungen der Wandelemente auf das zu berechnende Schalldämm-Maß. Als Randbedingung werden die Kanten der Wandschalen als eingespannt modelliert. Die Grenzflächen des Luftvolumens sind an die Wandschalen gekoppelt. Die strenge Kopplung bewirkt einerseits die Vorgabe der Schallschnelle auf der Berandung des Luftvolumens, andererseits wirkt der sich einstellende Schalldruck im Luftvolumen als Last auf die Wandschalen zurück.

Neben dem Referenzmodell werden für die Berechnung mittels des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zwei vereinfachte Modelle verwendet. Die vereinfachten

Tabelle 5.1.: Modellparameter der doppelschaligen Wand, Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens

Materialdaten		Diskretisierung (Referenzmodell)	
E-Modul (WS)	$E = (1.700 \pm 85) \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$	Elementkantenlänge $\beta = 0,06 \text{ m}$	
Dichte (WS)	$\rho = (696,0 \pm 34,8) \text{ kg/m}^3$	Elementtypen	
Verlustfaktor (WS)	$\eta = 0,1$	Wandschalen	Schalen
Poisson-Zahl (WS)	$\nu = 0,2$	Luftvolumen	Hexaeder
Dicke (WS)	$d = 0,0125 \text{ m}$	Ansatzfunktion	quadratisch
Temperatur (LV)	$T = (293,15 \pm 5,00) \text{ K}$	Anzahl FHG	19.065
Dichte (LV) [†]	$\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$	Randbedingungen / Lasten	
Schallgeschwindigkeit (LV) [†]	$c = 343 \text{ m/s}$	Randbedingung	eingespannt (Wandschalen)
		Last	ebene Welle, $p' = 1 \text{ Pa}$
[†] Nominalwert für $T = 293,15 \text{ K}$			
Parameter des Multi-Modell-Verfahrens			
Validierungskriterium	mittlere Pegeldifferenz		
Zulässiger Fehler	3,0 dB		
Vereinfachte Modelle (Anzahl)	2		
Vereinfachte Modelle (Art)	Variation des numerischen Modells		
Ergebnisgröße	Schwingschnelle der Wand		
Frequenzbereich	100 – 1.500 Hz		
Anzahl Frequenzstützstellen	141		
Frequenzauflösung	10 Hz		

Modelle werden durch Variation des numerischen Modells aus dem Referenzmodell abgeleitet. Dazu wird die Elementkantenlänge variiert, es entstehen zwei größere Diskretisierungen. Das vereinfachte Modell VM 1 verwendet eine Elementkantenlänge von $\beta^{\text{VM } 1} = 0,08 \text{ m}$, die Elementkantenlänge des Modells VM 2 beträgt $\beta^{\text{VM } 2} = 0,12 \text{ m}$. Die vereinfachten Modelle sind somit, basierend auf einer Diskretisierung von sechs Knoten je Biegewellenlänge, bis zu einer Frequenz von 900 Hz (VM 1) bzw. 400 Hz (VM 2) verwendbar.

Als Validierungskriterium wird eine mittlere Pegeldifferenz mit einer an den Testpunkten tolerierten Abweichung der berechneten Systemantworten von $\Pi^{\text{MPD}} = 3,0 \text{ dB}$ verwendet. Der Frequenzbereich der Berechnung ist 100 – 1.500 Hz, es werden 141 Frequenzstützstellen und eine resultierende Frequenzauflösung von 10 Hz verwendet. Alle weiteren Modellierungsparameter sind in Tabelle 5.1 angegeben.

5.2. Unsicherheitsquantifizierung mit der Monte Carlo-Methode

Die Unsicherheitsquantifizierung für die vorgestellte Berechnungsaufgabe wird mittels der Monte Carlo-Simulation umgesetzt. Es werden hier $N = 200$ Berechnungen durchgeführt. Diese Anzahl ist, aufgrund der geringen Konvergenzrate, für eine praktische Anwendung der Monte Carlo-Simulation typischerweise nicht ausreichend. Allerdings steht in dieser Untersuchung nicht die möglichst genaue Schätzung der Momente der den Ergebnisgrößen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen im Vordergrund, sondern die Nutzung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung.

Die Realisierungen der unsicheren Eingangsparameter E-Modul und Dichte der Wandschalen sowie die Temperatur des zwischen den Wandschalen eingeschlossenen Luftvolumens werden für jede Berechnung, mit Ausnahme der ersten Berechnung, aus den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen gezogen. Die erste Berechnung wird mit den Mittelwerten der verwendeten Materialparameter durchgeführt. Für alle Größen wird eine log-Normalverteilung angenommen. Die Ziehung der Werte erfolgt mit dem Mersenne-Twister Algorithmus als Pseudo-Zufallszahlen Generator [73]. Die unsicheren Eingangsparameter sind physikalische Größen. Für die Größen sind nur positive Zahlenwerte sinnvoll. Daher erfolgt die Erzeugung der Zufallszahlen auf Basis der log-Normalverteilung. Dadurch wird die Ziehung negativer Werte ausgeschlossen. Um dennoch die Parameter Mittelwert und Standardabweichung korrekt abzubilden, werden diese Werte zunächst in die entsprechenden Parameter der log-Normalverteilung transformiert. Die Transformationen des Mittelwerts μ in den zugehörigen Wert μ^{\log} sowie der Standardabweichung σ in die logarithmische Standardabweichung σ^{\log} erfolgt nach [52]:

$$\mu^{\log} = \ln \left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}}} \right) \quad (5.5)$$

$$\sigma^{\log} = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \right)} \quad . \quad (5.6)$$

Für die Monte Carlo-Simulation wird für jede Berechnung der Satz der Eingangsgrößen aus den log-Normalverteilungen ermittelt und in die Berechnung eingesetzt. Die Transformation stellt sicher, dass die aus den, mit μ^{\log} und σ^{\log} parametrisierten log-Normalverteilungen, gezogenen Zufallszahlen näherungsweise den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ aufweisen. Die Berechnungen werden aufgrund des großen Umfangs nur parallelisiert durch Verteilung der Frequenzstützstellen auf vier Prozessoren durchgeführt. Wie angesprochen, ist die Verwendung von 200 Berechnungen typischerweise nicht ausreichend um eine konvergierte Schätzung der Momente der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausgangsgröße zu erhalten. Bei einer unabhängigen Berechnung mit dem Referenzmodell und unter Verwendung des

Multi-Modell-Verfahrens wären die erhaltenen Ergebnisse nur bedingt vergleichbar. Daher werden für die Berechnung mit dem Referenzmodell sowie für die Auswertung mittels des Multi-Modell-Verfahrens dieselben Werte für die Eingangsgrößen verwendet.

Das Ergebnis der Berechnung ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Es werden der berechnete Mittelwert des Schalldämm-Maßes \mathcal{R}^μ und die Standardabweichung \mathcal{R}^σ über der Frequenz aufgetragen. Mittelwert und Standardabweichung werden mit dem Transmissionsgrad τ aus allen Realisierungen τ^i nach Gleichung (5.7) bzw. Gleichung (5.8) berechnet:

$$\mathcal{R}^\mu(f) = 10 \lg \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau^i(f)} \right) \text{ dB} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{R}^\sigma(f) = 10 \lg \left[\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\tau^i(f)} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\tau^j(f)} \right)^2} \right] \text{ dB} \quad (5.8)$$

In der oberen Darstellung ist das anhand des Referenzmodells berechnete Schalldämm-Maß und unter Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens dargestellt. Als schwarze Linie ist für beide Varianten jeweils der aus den Realisierungen der Ausgangsgröße ermittelte Mittelwert des Schalldämm-Maßes gemäß Gleichung (5.7) dargestellt. Dabei wird für die Berechnung mit dem Referenzmodell eine gestrichelte Linie verwendet. Die Berechnung mit dem Multi-Modell-Verfahren verwendet eine durchgezogene Linie. Außerdem ist für beide Berechnungen der Bereich der 1,96-fachen Standardabweichung um den Mittelwert markiert. Dieser Bereich entspricht für eine Normalverteilung dem 95 %-Konfidenz-Intervall. Die Standardabweichung wird als empirische Standardabweichung gemäß Gleichung (5.8) aus den Realisierungen der Ausgangsgröße berechnet. Der mittlere Diagrammteil zeigt den Fehler des Mittelwerts und der Standardabweichung über der Frequenz. In der unteren Darstellung ist, analog zu den weiteren Darstellungen in dieser Arbeit, für jede dritte Frequenzstützstelle das verwendete Modell markiert.

Es ist anhand Abbildung 5.2 gut zu erkennen, dass der Verlauf des ermittelten Schalldämm-Maßes, sowohl bei Berechnung mit dem Referenzmodell als auch bei Verwendung des Multi-Modell-Verfahrens, prinzipiell ähnlich ist. Deutliche Unterschiede der Berechnungsergebnisse lassen sich im Bereich von 300 – 400 Hz sowie im Bereich von 650 – 700 Hz und von 900 – 1.100 Hz erkennen. Bemerkenswert ist hier, dass die deutlichen Einbrüche des Schalldämm-Maßes im Bereich von 580 Hz und 850 Hz auch durch die vereinfachten Modelle gut abgebildet werden. In der unteren Darstellung in Abbildung 5.2 sind die verwendeten Modelle für jede Frequenzstützstelle markiert. Es ist zu erkennen, dass vor allem das Modell VM 2 im Frequenzbereich unterhalb 720 Hz sowie von 920 – 1.110 Hz und damit sehr umfangreich eingesetzt wird. Basierend auf der Diskretisierung wird zunächst nur der Einsatz dieses Modells bis zu einer Frequenz von etwa 400 Hz erwartet. Dennoch

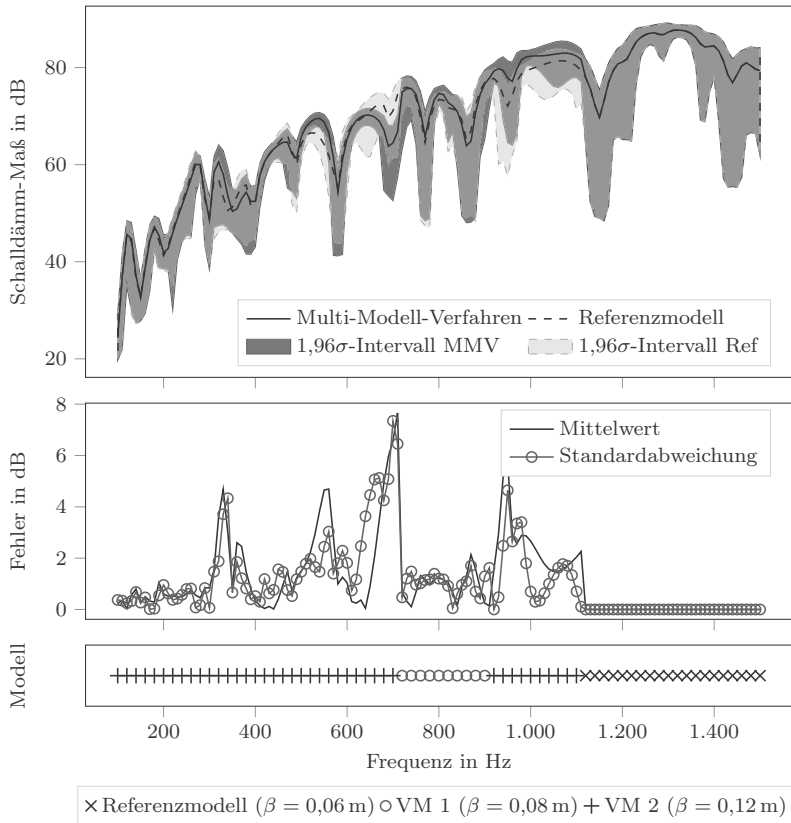


Abbildung 5.2.: Vergleich von Mittelwert und Standardabweichung des berechneten Schalldämm-Maßes der doppelschaligen Wand bei Monte Carlo-Simulation mit zweihundert Berechnungen (oben), Abweichung des Mittelwerts und der Standardabweichung (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten)

liefert das Modell, im Vergleich zu dem Referenzmodell und basierend auf dem gewählten Validierungskriterium, ausreichend gute Ergebnisse und wird somit auch oberhalb des erwarteten Einsatzbereichs verwendet. Das Modell VM 1 wird nur in einem kleinen Frequenzbereich von 720 – 910 Hz verwendet. Diese obere Grenze entspricht dem auf Basis der Diskretisierung erwarteten Einsatzbereich für dieses Modell. Oberhalb von 1.110 Hz wird das Referenzmodell eingesetzt.

Der Vergleich des aus der Anwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens resultierenden Fehlers zu der mit dem Referenzmodell ermittelten Lösung ist in der mittleren Darstellung in Abbildung 5.2 für den Mittelwert sowie für die Standard-

abweichung über der Frequenz aufgetragen. Als Fehlermaß wird hier für jede Frequenzstützstelle der Betrag der Pegeldifferenz der berechneten Größen verwendet. Gut zu erkennen sind vier schmale Frequenzbereiche mit einem Fehler von mehr als 4,0 dB. Dabei treten die Fehler sowohl für den Mittelwert als auch für die Standardabweichung auf. Wird für den gesamten Frequenzbereich das Fehlermaß Ψ (vgl. Gleichung (4.1)) verwendet, so beträgt der Fehler des Mittelwerts $\Psi_{\text{Mittelwert}} = 1,5 \text{ dB}$. Der Fehler der Standardabweichung beträgt $\Psi_{\text{Std.Abw.}} = 1,4 \text{ dB}$. Insgesamt resultiert somit ein im Mittel geringer Fehler durch die Anwendung des Multi-Modell-Verfahrens.

Neben dem Vergleich der berechneten Schalldämm-Maße ist in Abbildung 5.3 die erforderliche Rechenzeit für alle Berechnungen im Rahmen der Monte Carlo-Simulation dargestellt. Die Lösung des Referenzmodells erfordert bei jeder Berechnung eine nahezu gleichbleibende Rechenzeit von ca. 325 s. Das entwickelte Multi-Modell-Verfahren erfordert bei der ersten Berechnung eine Rechenzeit von 280 s. Somit wird, analog zu den Beispielen in Kapitel 4, bereits bei der ersten Berechnung eine Rechenzeitersparnis von ca. 11,4 % erzielt. Entsprechend der in Abschnitt 3.6 vorgestellten Konstruktion des Verfahrens werden die Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle bei der ersten durchgeführten Berechnung ermittelt und gespeichert. Bei jeder folgenden Berechnung wird dieses Wissen wiederverwendet, die erforderlichen Validierungsprozesse können damit übersprungen werden. Somit sinkt die für jede weitere Berechnung erforderliche Rechenzeit in diesem Beispiel auf ca. 193 s ab. Die Rechenzeiterparnis beträgt für alle folgenden Berechnungen im Mittel 40,6 %. Insgesamt wird für die Monte Carlo-Simulation eine Rechenzeiterparnis von 40,5 % erreicht.

5.3. Varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse

Analog zu den Untersuchungen zur Unsicherheitsquantifizierung des Schalldämm-Maßes in Abschnitt 5.2 wird in diesem Abschnitt die Anwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zur globalen Sensitivitätsanalyse vorgestellt. Die globale Sensitivitätsanalyse wird hier verwendet, um die Sensitivitätskoeffizienten der Eingangsgrößen der Berechnung zu ermitteln. Dazu wird die durch die Variation der Eingangsparameter in der Ausgangsgröße erzeugte Varianz ausgewertet. Daher wird das Verfahren auch varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse genannt.

Das Verfahren der globalen Sensitivitätsanalyse verwendet zur Ermittlung der Sensitivitätskoeffizienten, ähnlich wie die Unsicherheitsquantifizierung der Ausgangsgröße, eine Monte Carlo-Simulation mit bei jeder Berechnung variierten Eingangsparametern. Zur Erhöhung der Konvergenzrate des Verfahrens werden die Eingangsparameter häufig nicht stochastisch aus den Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Zufallsvariable gezogen. Stattdessen wird eine Quasi-Monte Carlo-Methode verwendet. Alternativ können deterministische Zahlenfolgen als Eingangsgrößen genutzt werden. Grundsätzlich ist die Verwendung stochastischer Eingangsparameter aber

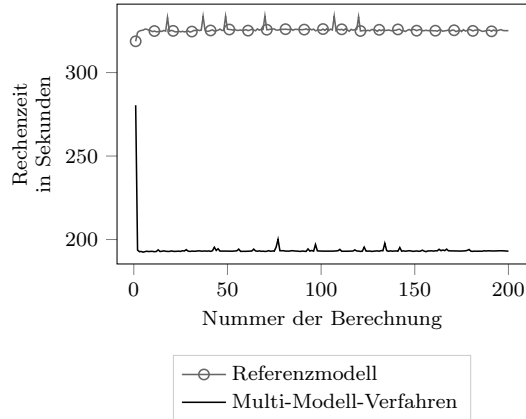


Abbildung 5.3.: Vergleich der Rechenzeiten für die Unsicherheitsquantifizierung mit der Monte Carlo-Simulation bei Berechnung mit dem Referenzmodell sowie Nutzung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens. Die bei der ersten Berechnung geringe Rechenzeiterparnis nimmt ab der zweiten Berechnung deutlich zu.

ebenso möglich. In diesem Beispiel wird die SOBOL-Sequenz zur Erzeugung der Eingangsparameter verwendet. Die SOBOL-Sequenz ist eine Folge, deren Elemente eine geringe Diskrepanz aufweisen. Diese Eigenschaft führt dazu, dass der Parameterraum möglichst gleichmäßig abgedeckt wird. Dies unterscheidet alle derartigen Zahlenfolgen von Zufallszahlen, da Zufallszahlen ungleichmäßig im Parameterraum verteilte Anhäufungen bilden und damit den Parameterraum nicht gleichmäßig abdecken. [112]

Für die Berechnung werden wie im vorherigen Abschnitt der E-Modul und die Dichte der Wandschalen sowie die Lufttemperatur als zu variierende Eingangsgrößen berücksichtigt. Für diese Größen werden nachfolgend die Sensitivitätskoeffizienten berechnet. Mit der SOBOL-Sequenz als Zahlenfolge werden die Werte der Eingangsdaten ermittelt. Dazu wird für jede Eingangsgröße eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ verwendet. Als Werte für μ und σ werden die in Abschnitt 5.1 beschriebenen und in Tabelle 5.1 angegebenen Werte verwendet. Der Vollständigkeit halber sei hier darauf hingewiesen, dass die verwendete Gleichverteilung eine Standardabweichung von $\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ aufweist. Alle anderen Modellierungsparameter sind identisch mit den für die Unsicherheitsquantifizierung der Ausgangsgröße in Abschnitt 5.2 verwendeten Werten.

Die Erzeugung der Eingangsgrößen aus der SOBOL-Sequenz sowie die Auswertung der Sensitivitätskoeffizienten aus den Ergebnissen der Monte Carlo-Simulation sind in Abschnitt 2.3 dargestellt. Als Hilfsmittel wird für die Erzeugung der Eingangsgrößen und Berechnung der Sensitivitätskoeffizienten die frei verfügbare Bibliothek *SA-*

Lib [67] verwendet. Für die nachfolgenden Untersuchungen werden, wie im vorherigen Beispiel auch, 200 Berechnungen durchgeführt. Auch hier wird nicht erwartet, dass die präzentierten Sensitivitätskoeffizienten bereits konvergiert sind. Für praktische Anwendungen ist typischerweise eine größere Anzahl Berechnungen erforderlich. Da hier der Fokus auf der Anwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens liegt, wird die Anzahl von 200 Berechnungen dennoch als ausreichend betrachtet.

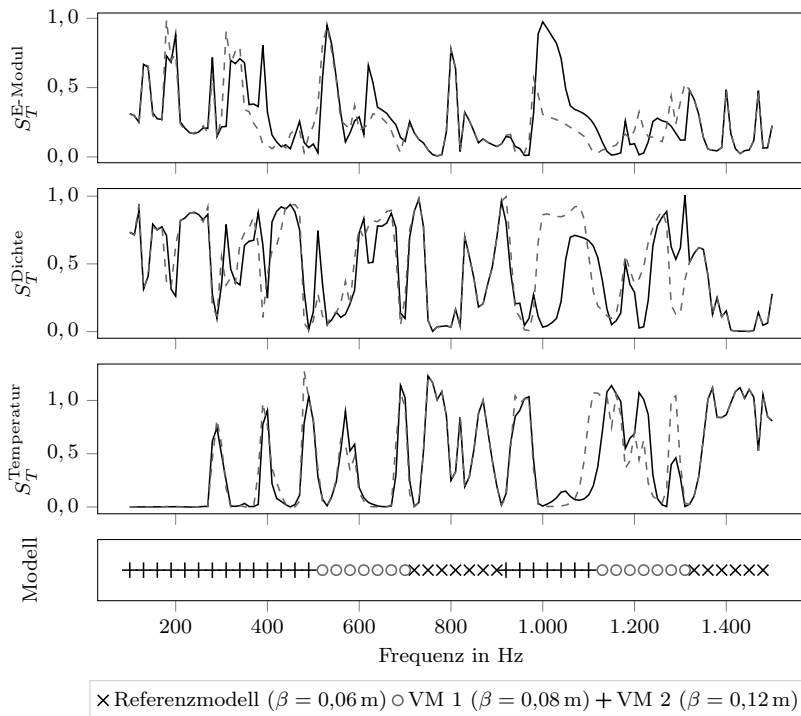


Abbildung 5.4.: Vergleich der totalen Sensitivitätskoeffizienten für E-Modul (oben), Dichte (Mitte) und Temperatur (unten) bei Berechnung mit dem Referenzmodell (‘—’) sowie Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens (‘- -’). Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle (ganz unten), Markierung an jeder dritten Frequenzstützstelle

Die Berechnungsergebnisse der globalen Sensitivitätsanalyse sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber werden hier nur die Ergebnisse der totalen Sensitivitätskoeffizienten sowie deren Fehler vorgestellt und diskutiert. In Abschnitt D des Anhangs sind in Abbildung D.1 zusätzlich die Ergebnisse der Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung dargestellt. In den drei oberen Diagrammen sind jeweils die totalen Sensitivitätskoeffizienten für den E-Modul und die Dichte der

Wandschalen sowie der Temperatur über der Frequenz aufgetragen. In der untersten Darstellung ist für jede dritte Frequenzstützstelle das verwendete Modell markiert. Anhand der untersten Darstellung ist zu erkennen, dass sich die Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle von den Untersuchungen zur Unsicherheitsquantifizierung des Schalldämm-Maßes unterscheiden. In diesem Beispiel wird das größte Modell, VM 2, im Frequenzbereich von 100 – 510 Hz sowie in einem Bereich von 920 – 1.110 Hz verwendet. Dieser, im höheren Frequenzbereich liegende Abschnitt, entspricht dem Einsatzbereich bei der Unsicherheitsquantifizierung. Das vereinfachte Modell mit der feineren Diskretisierung, VM 1, wird im Frequenzbereich von 520 – 710 Hz sowie im Bereich von 1.120 – 1.310 Hz eingesetzt. Für die übrigen Frequenzstützstellen wird das Referenzmodell verwendet. Der wesentliche Grund für die veränderten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle ist die veränderte Art der Erzeugung der Eingangsdaten. Bei der Unsicherheitsquantifizierung der Ausgangsgröße werden für die erste Berechnung die Mittelwerte der als unsicher betrachteten Eingangsgrößen verwendet. Für alle weiteren Berechnungen werden die Eingangsgrößen als Realisierungen der den jeweiligen Zufallsvariablen zugeordneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen gezogen. Die bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle basieren somit auf den Mittelwerten der als unsicher betrachteten Eingangsgrößen. Für die globale Sensitivitätsanalyse dagegen basieren die für die Eingangsgrößen verwendeten Werte auf der SOBOL-Sequenz. Die für die erste Berechnung verwendete Parameterkombination unterscheidet sich daher von den Mittelwerten der Eingangsgrößen. Daher werden durch das Multi-Modell-Verfahren andere Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle bestimmt.

Anhand der aufgetragenen Sensitivitätskoeffizienten ist zu erkennen, dass der Einfluss des E-Moduls der Wandschalen auf das berechnete Schalldämm-Maß mit der Frequenz abnimmt. Gleichzeitig nimmt der Einfluss der Temperatur des Luftvolumens mit der Frequenz zu. Die Dichte der Wandschalen hat über den gesamten Frequenzbereich einen eher hohen Einfluss, wobei dieser ab einer Frequenz von ca. 1.400 Hz deutlich abnimmt.

In Abbildung 5.5 ist der Fehler der berechneten, totalen Sensitivitätskoeffizienten im Vergleich zur Berechnung mit dem Referenzmodell für alle Frequenzstützstellen dargestellt. Die entsprechende Darstellung für die Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung ist im Anhang in Abbildung D.2 zu finden. Als Fehlermaß wird hier der Betrag der Differenz der berechneten Sensitivitätskoeffizienten verwendet. Die vertikale Achse ist logarithmisch skaliert. In den Frequenzbereichen, in denen das Referenzmodell verwendet wird, ist der Fehler definitionsgemäß Null. Für die logarithmische Auftragung wird hier der Fehler zu eins gesetzt, die Bereiche sind durch Kreuze markiert. Der Fehler liegt für die meisten der berechneten Frequenzstützstellen unterhalb 10 %. Im hohen Frequenzbereich oberhalb 910 Hz ist der Fehler für alle betrachteten Eingangsparameter relativ groß. Im Mittel über alle Frequenzstützstellen wird für den totalen Sensitivitätskoeffizienten des E-Moduls der Wandschalen ein mittlerer Fehler von 9,9 % erreicht. Die totalen Sensitivitätskoeffizienten der Dichte der Wandschalen sowie der Temperatur des Luftvolumens werden jeweils im Mittel

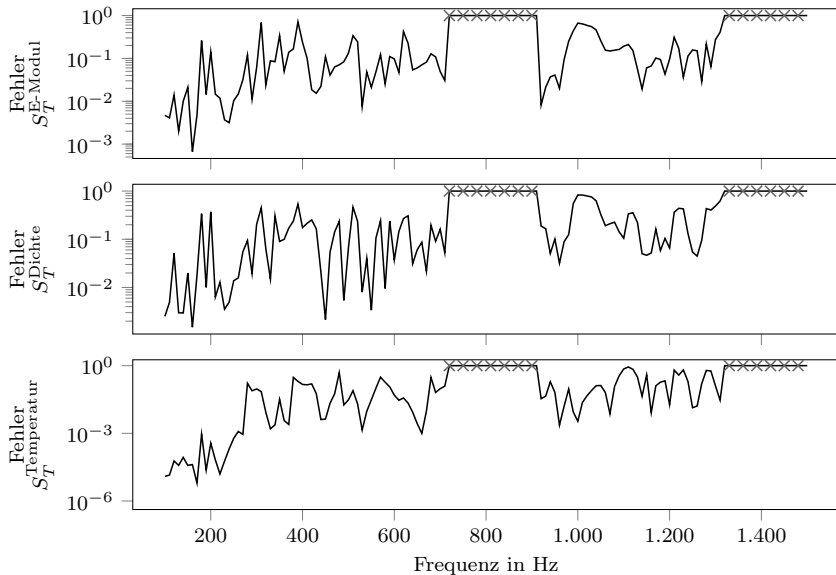


Abbildung 5.5.: Fehler der mit dem Multi-Modell-Verfahren berechneten, totalen Sensitivitätskoeffizienten für E-Modul (oben), Dichte (Mitte) und Temperatur (unten) über der Frequenz. Bereiche verschwindenden Fehlers (Bereiche in denen das Referenzmodell verwendet wird) sind mit einem Kreuz markiert.

mit 13,6 % und 8,2 % Abweichung ermittelt. Die Fehler der in Abbildung D.2 dargestellten Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung liegen in einem ähnlichen Bereich. Für praktische Anwendungen erscheinen die mittels des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens erhaltenen Näherungen der Sensitivitätskoeffizienten daher geeignet.

In Abbildung 5.6 sind die für jede Berechnung der Sensitivitätsanalyse erforderliche Rechenzeit bei Berechnung des Referenzmodells sowie bei Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens aufgetragen. Grundsätzlich ist das Verhalten ähnlich der Untersuchung zur Unsicherheitsquantifizierung des Schalldämm-Maßes. Auch hier werden ab der zweiten Berechnung die bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle wiederverwendet. Dadurch können die erforderlichen Validierungsprozesse übersprungen werden. Dies resultiert in einer Rechenzeitersparnis von im Mittel 32,9 % ab der zweiten Berechnung. Bei der ersten Berechnung der Sensitivitätsanalyse wird in diesem Fall eine negative Rechenzeitersparnis von -1,5 % erzielt. Das Multi-Modell-Verfahren ist somit geringfügig langsamer als die direkte Lösung des Referenzmodells. Durch die Wiederverwendung der während der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle werden die folgenden Berechnungen dennoch deutlich beschleunigt. Dieser Effekt überkompensiert den Nachteil der ersten Berechnung praktisch vollständig.

Insgesamt wird über alle Berechnungen eine Rechenzeitersparnis von 32,7 % erzielt. Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass die Rechenzeitersparnis bei der ersten Berechnung aufgrund der vollständigen Durchführung des Verfahrens, inklusive der zufallsbasierten Validierung der vereinfachten Modelle in einzelnen Frequenzgruppen, eine Zufallsvariable ist, vgl. Abschnitt 4.4. Bei erneuter Durchführung der vollständigen Sensitivitätsanalyse wäre daher auch für die erste Berechnung eine positive Rechenzeitersparnis möglich.

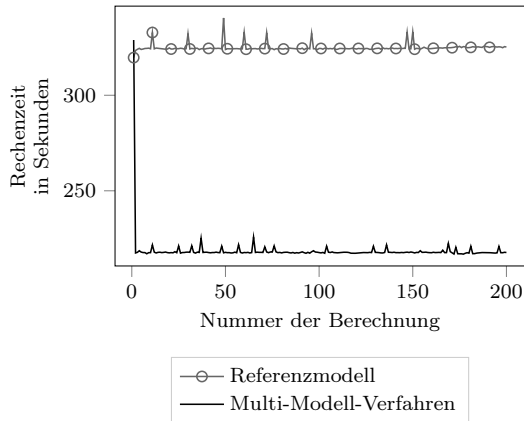


Abbildung 5.6.: Vergleich der Rechenzeiten für die globale Sensitivitätsanalyse bei Berechnung mit dem Referenzmodell sowie Nutzung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens. Die bei der ersten Berechnung negative Rechenzeitersparnis wird durch Ersparnis bei allen folgenden Berechnungen überkompensiert.

5.4. Fazit der Anwendung zur Unsicherheitsquantifizierung

In diesem Kapitel wird das entwickelte Multi-Modell-Verfahren auf stochastische Berechnungen angewendet. Das Ziel ist die Unsicherheitsquantifizierung der Ausgangsgröße sowie die Sensitivitätsanalyse der Ausgangsgröße gegenüber den Eingangsgrößen. Als Berechnungsbeispiel wird das Schalldämm-Maß einer einfachen, doppel-schaligen Wand bei Anregung mit einer ebenen Luftschallwelle untersucht. Neben dem Referenzmodell werden zwei vereinfachte Modelle verwendet. Diese werden aus dem Referenzmodell durch Variation der Diskretisierung abgeleitet. Es handelt sich um eine Variation des numerischen Modells. Die stochastischen Untersuchungen betrachten den Einfluss der Unsicherheiten des E-Moduls und der Dichte sowie der Lufttemperatur auf das berechnete Schalldämm-Maß. Dabei wird in Abschnitt 5.2 eine Monte Carlo-Simulation für diese Größen durchgeführt. Als Ergebnisgröße wird

das Schalldämm-Maß nach Mittelwert und Standardabweichung erhalten. Weiterhin wird in Abschnitt 5.3 eine globale Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Dabei wird die Sensitivität des Schalldämm-Maßes gegenüber den untersuchten Eingangsgrößen ermittelt.

Die Nutzung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens für stochastische Untersuchungen basiert auf der Wiederverwendung der bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle. Bei der ersten Berechnung werden die zur Verfügung stehenden, vereinfachten Modelle in Frequenzgruppen gegen das Referenzmodell validiert. In den Frequenzgruppen, in denen der Validierungsprozess erfolgreich ist, werden die vereinfachten Modelle anstelle des Referenzmodells verwendet. Dadurch wird eine Rechenzeiterparnis erzielt. Nach der ersten Berechnung sind diese Einsatzbereiche bekannt und können wiederverwendet werden. Bei der Unsicherheitsquantifizierung mittels der Monte Carlo-Methode und bei der globalen Sensitivitätsanalyse sind viele gleichartige Berechnungen mit variierenden Eingangsparametern durchzuführen. Dabei werden die Eingangsgrößen als Zufallsvariable modelliert und die Eingangsparameter als Realisierungen dieser Zufallsvariablen bei jeder Berechnung neu bestimmt. Es wird angenommen, dass die Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden, vereinfachten Modelle nicht wesentlich durch die Variation der Eingangsparameter beeinflusst werden. Daher können für alle folgenden Berechnungen die bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche wiederverwendet werden. Dadurch werden die erforderlichen Validierungsprozesse obsolet und können übersprungen werden. Es wird eine, im Vergleich zu der einfachen Berechnung, große Rechenzeiterparnis erreicht.

Die Anwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zur Unsicherheitsquantifizierung wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt. Die Realisierungen der als Zufallsvariablen modellierten Eingangsgrößen E-Modul und Dichte der Wandschalen sowie die Temperatur des zwischen den Wandschalen befindlichen Luftvolumens werden aus der log-Normalverteilung gezogen und das Schalldämm-Maß für jeden Satz der Eingangsparameter berechnet. Insgesamt werden 200 Berechnungen durchgeführt. Diese Anzahl ist für praktische Anwendungen der Monte Carlo-Methode typischerweise zu gering. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus dagegen auf der Demonstration der Wirkung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens. Daher wird die Anzahl der Berechnungen als ausreichend betrachtet. Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass für diesen Anwendungsfall die Ergebnisgröße mit einem geringen Fehler approximiert wird. Dabei werden die vereinfachten Modelle erwartungsgemäß im unteren Frequenzbereich verwendet, das Referenzmodell wird im hohen Frequenzbereich eingesetzt. Der Vergleich der für jede Berechnung erforderlichen Rechenzeit mit der direkten Lösung des Referenzmodells zeigt das erwartete Verhalten. Bei der ersten Berechnung wird, aufgrund der erforderlichen Validierungsprozesse, ein schwach positives Rechenzeiterparnis erzielt. Bei jeder folgenden Berechnung werden die bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle wiederverwendet, die Validierungsprozesse werden übersprungen. Entsprechend wird ein deutlich größeres Rechenzeiterparnis erreicht. Dadurch kann die Monte Carlo-Simulation insgesamt um ca. 41 % beschleunigt werden. Der Vergleich des aus

der Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens resultierenden Fehlers zeigt sowohl für den Mittelwert als auch für die Standardabweichung im Mittel über alle Frequenzstützstellen geringe Abweichungen. Somit erscheint die Wiederverwendung der bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle trotz der Variation der Eingangsparameter gerechtfertigt.

Analog zu der Unsicherheitsquantifizierung werden in Abschnitt 5.3 die Ergebnisse der globalen Sensitivitätsanalyse präsentiert. Gegenüber den Untersuchungen in Abschnitt 5.2 wird hier die Sensitivität des Schalldämm-Maßes gegenüber den Eingangsgrößen E-Modul und Dichte der Wandschalen sowie der Temperatur des zwischen den Wandschalen eingeschlossenen Luftvolumens berechnet. Es werden ebenfalls 200 Berechnungen durchgeführt. Auch für die Berechnung der Sensitivitätskoeffizienten ist diese Anzahl typischerweise zu gering. Hier genügt sie dennoch zur Demonstration der Wirkung des Multi-Modell-Verfahrens. Zur Erzeugung der Realisierungen der Zufallsvariablen der Eingangsgrößen wird hier, anstelle von Quasi-Zufallszahlen, die SOBO-Seqenz verwendet. Der direkte Vergleich der mit dem Referenzmodell sowie unter Anwendung des Multi-Modell-Verfahrens berechneten, totalen Sensitivitätskoeffizienten zeigt eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Dabei werden vor allem im unteren Frequenzbereich Abweichungen im Bereich weniger Prozent zwischen der Referenzlösung und dem mit dem Multi-Modell-Verfahren ermittelten Ergebnis erzielt. Die Abweichungen steigen insgesamt mit der Frequenz an. Im Mittel über alle Frequenzstützstellen weichen die mit dem Multi-Modell-Verfahren berechneten, totalen Sensitivitätskoeffizient um ca. 10 % von der Referenzlösung ab. Der bereits für die Unsicherheitsquantifizierung beobachtete Effekt, die deutliche Vergrößerung der Rechenzeiterparnis ab der zweiten Berechnung, wird auch für die Sensitivitätsanalyse erzielt. Dabei wird für die erste Berechnung eine schwach negative Rechenzeiterparnis erzielt. Das Multi-Modell-Verfahren benötigt 1,5 % mehr Rechenzeit als die direkte Lösung des Referenzmodells. Im Vergleich zur Unsicherheitsquantifizierung ist dies ist das Resultat von veränderten Einsatzbereichen der zur Verfügung stehenden Modelle. Dennoch wird durch das Entfallen der Validierungsprozesse insgesamt eine Rechenzeiterparnis von 33 % erreicht.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Untersuchungen zielen vor allem auf die Untersuchung von Hypothese Nummer 4 der vorliegenden Arbeit ab. Diese Hypothese postuliert die Möglichkeit, die bei einer Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle wieder zu verwenden. Damit kann bei Anwendungen mit vielen gleichartigen Berechnungen eine weitere Rechenzeiterparnis erreicht werden. Zentral für diese Hypothese ist die Annahme, dass sich die ermittelten Einsatzbereiche der zur Verfügung stehenden Modelle auch bei Variation der Eingangsparameter nicht wesentlich ändern. Für die berücksichtigte Unsicherheit der Eingangsgrößen zeigen die Untersuchungen vergleichsweise geringe Fehler der ermittelten Ergebnisgrößen, wie dem Mittelwert und der Standardabweichung des Schalldämm-Maßes sowie den berechneten Sensitivitätskoeffizienten. Diese geringen Fehler bestätigen die Annahme der Hypothese, dass die Wiederverwendung der ermittelten Einsatzbereiche der Modelle gerechtfertigt ist. Weiterhin bestätigen die Untersuchungen in diesem Kapitel auch die Hypothese Nummer 1. Demnach kön-

nen die vereinfachten Modelle, die hier durch die Variation des numerischen Modells erzeugt werden, zur Approximation der zu berechnenden Systemantwort des Referenzmodells verwendet werden. Insgesamt zeigen die vorgestellten Anwendungen, dass das Multi-Modell-Verfahren auch zur Nutzung in stochastischen Untersuchungen geeignet ist und diese wesentlich beschleunigen kann. Der im Rahmen dieser Untersuchungen resultierende Fehler ist gering und wird als für praktische Anwendungen akzeptabel eingeschätzt. Die mögliche Rechenzeiterparnis liegt im Bereich einiger zehn Prozent und reduziert den numerischen Aufwand deutlich.

6. Zusammenfassung

Die Begrenzung der negativen gesundheitlichen Effekte von Lärmexposition ist heute wesentlicher Bestandteil der Gesetzgebung. Die akustische Optimierung von Produkten ist daher wichtiger Bestandteil der Produktentwicklung. Wie in vielen anderen Fachdisziplinen der Natur- und Ingenieurwissenschaften wird die Arbeit in der Akustik heute maßgeblich durch den Einsatz computergestützter Methoden bestimmt. Dabei kommt den numerischen Berechnungsverfahren eine besondere Bedeutung zu. Für numerische Berechnungen im Bereich der Akustik werden heute vor allem die FEM, die Randelemente-Methode (BEM), die Verfahren der geometrischen Akustik sowie die statistische Energieanalyse verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit werden Berechnungen basierend auf der FEM betrachtet. Die FEM und die BEM zählen zu den Diskretisierungsverfahren. Trotz stetig steigender Leistung der verwendeten Computer sind numerische Berechnungen mit Diskretisierungsverfahren weiterhin speicher- und zeitintensiv. Daher haben sich Modellreduktionsverfahren zur Beschleunigung der Berechnung etabliert. Der Einsatz in der Akustik stellt an Modellreduktionsverfahren besondere Herausforderungen, die durch existierende Verfahren nur unzureichend adressiert werden. Vor allem für Anwendungsfälle mit hoher Modendichte, also Berechnungen großer Strukturen im hohen Frequenzbereich, erzielen die etablierten Verfahren nur eine geringe Reduktion des Berechnungsaufwands. Der Effekt wird vor allem im Rahmen stochastischer Untersuchungen mit vielen Modellauswertungen relevant. Daher wird in der vorliegenden Arbeit ein Multi-Modell-Verfahren vorgeschlagen, mit dem numerische Berechnungen mit dem FEM in der Akustik sowohl für eine einzelne Berechnung als auch für stochastische Untersuchungen beschleunigt werden können.

Die Durchführung einer numerischen Berechnung erfolgt anhand von Modellen, zu Beginn wird der Modellierungsprozess durchlaufen. Der Modellierungsprozess gliedert sich in vier wesentliche Abstraktionsebenen. Auf der obersten Abstraktionsebene wird ein durch einen Beobachter rezipiertes Phänomen in ein Realitätsmodell überführt. Die Beschreibung dieses Realitätsmodells mit der Mathematik übersetzt das Realitätsmodell in die zweite Ebene des Modellierungsprozesses, das mathematische Modell. Um die Lösung des mathematischen Modells zu ermöglichen, folgt die Überführung auf der dritten Ebene in ein numerisches Modell. Die Berechnung mit einem Computer erfordert auf der letzten Ebene die Übersetzung des numerischen Modells in Computercode. Die Nutzung eines einzelnen numerischen Modells für eine gegebene Berechnungsaufgabe ist nicht immer der effizienteste Weg. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit der Ansatz verfolgt, auf den verschiedenen Abstraktionsebenen des Modellierungsprozesses Vereinfachungen einzuführen und so zusätzlich

zu dem zu lösenden Referenzmodell mehrere, vereinfachte numerische Modelle zu erhalten. Von dem Referenzmodell wird für die gesamte Berechnung eine ausreichende Ergebnisqualität erwartet. Die vereinfachten Modelle sind effizienter als das Referenzmodell lösbar, demgegenüber sind sie nicht für die Ermittlung aller Berechnungsergebnisse geeignet. Der Ansatz des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Multi-Modell-Verfahrens ist es daher, zusätzlich zu dem zu lösenden Referenzmodell weitere vereinfachte Modelle hinzuzunehmen und das Berechnungsergebnis des Referenzmodells unter Verwendung aller zur Verfügung stehenden Modelle zu approximieren. Dazu wird die Eignung der vereinfachten Modelle überprüft und sie werden entsprechend ihrer Eignung anstelle des Referenzmodells eingesetzt. Dadurch wird der Berechnungsaufwand reduziert.

Zur Umsetzung dieser Idee wird das Multi-Modell-Verfahren entwickelt. Kern des Multi-Modell-Verfahrens ist eine Modell-Management-Strategie, bestehend aus einem Validierungsprozess und einer Budgetplanung. Mit dem Validierungsprozess werden die zur Verfügung stehenden vereinfachten Modelle auf Basis definierter Validierungskriterien gegen das Referenzmodell validiert. Dieser Prozess erfolgt an wenigen, ausgewählten Testpunkten im gesamten Frequenzbereich. Die Testpunkte werden so gewählt, dass eine aussagekräftige Validierung ermöglicht wird. Der Validierungsprozess erfordert einen zusätzlichen Berechnungsaufwand, da sowohl jedes vereinfachte Modell als auch das Referenzmodell an den Testpunkten ausgewertet werden müssen. Um insgesamt eine Reduktion des Berechnungsaufwands und damit eine Rechenzeiterparnis zu erzielen, wird weiterhin die Budgetplanung entwickelt. Dazu werden die Kosten der zur Verfügung stehenden Modelle anhand der jeweils zur Lösung erforderlichen Rechenzeit charakterisiert. Die Budgetplanung ermittelt die Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle auf Basis der Kosten jedes Modells derart, dass der Berechnungsaufwand für die Validierungsprozesse kompensiert wird. Diese Planung ist vor Beginn der Berechnung nicht eindeutig, da die Anteile der vereinfachten Modelle an der Lösung insgesamt unbekannt sind. Daher werden die Einsatzbereiche der Modelle zunächst auf Basis der jeweiligen Kosten geschätzt. Die Anzahl der Validierungsprozesse wird unter der Nebenbedingung einer positiven Rechenzeiterparnis maximiert. Dieses Verfahren führt zunächst zu einer verschwindenden Rechenzeiterparnis. Demgegenüber führt die Maximierung der Validierungsprozesse zu einer möglichst großen Sicherheit des Verfahrens. Die vereinfachten Modelle werden nur eingesetzt, wenn ihre Eignung möglichst weitgehend abgesichert ist. Während der vom niedrigen zum hohen Frequenzbereich fortschreitenden Berechnung wird zusätzliches Wissen über die Einsetzbarkeit der vereinfachten Modelle verfügbar. Dieses Wissen wird während der Berechnung genutzt, um die weitere Validierung der vereinfachten Modelle vorzeitig zu beenden, wenn eine erfolgreiche Validierung zunehmend unwahrscheinlich wird. Dadurch wird die eigentliche Rechenzeiterparnis des vorgestellten Multi-Modell-Verfahrens ermöglicht. Das entwickelte Multi-Modell-Verfahren wird für die Nutzung mit verschiedenen, vereinfachten Modellen verifiziert. Die vereinfachten Modelle werden dabei auf den Abstraktionsebenen des Realitätsmodells, des mathematischen Modells und des numerischen Modells aus dem Referenzmodell abgeleitet. Die Verifikationsuntersuchungen

zeigen bereits die Fähigkeit des Verfahrens eine einzelne Berechnung zu beschleunigen. Weiterhin wird das Verfahren zur Beschleunigung im Rahmen von stochastischen Untersuchungen angewendet. Dabei wird eine Unsicherheitsquantifizierung mit der Monte Carlo-Methode sowie eine varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse betrachtet.

Im Rahmen der Verifikationsbeispiele wird anhand von drei Beispielen die Ableitung vereinfachter Modelle durch Variation des numerischen Modells untersucht. Dabei wird mit der Berechnung der Biegeschwingungen einer Fensterscheibe und der Berechnung des Schalldruckpegels in einem Impedanzrohr je eine Fragestellung aus dem Bereichs Körperschalls und des Luftschalls untersucht. Für diese Beispiele werden die vereinfachten Modelle durch Variation der Diskretisierung aus dem Referenzmodell abgeleitet. Die Nutzung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens erzielt dabei für die Körperschallberechnungen eine vergleichsweise geringe Rechenzeiterparnis, für die Luftschallberechnung wird eine größere Rechenzeiterparnis erzielt. In beiden Fällen werden die vereinfachten Modelle entsprechend ihrer Eignung verwendet. Der resultierende Fehler der Berechnung ist für beide Anwendungsfälle gering. Der wesentliche Unterschied zwischen den Untersuchungen besteht in der Abhängigkeit der aufzulösenden, akustischen Wellen von der Frequenz. Während die für die Luftschallberechnung relevante Longitudinalwellenlänge umgekehrt proportional zur Frequenz ist, verhält sich die für Körperschallberechnungen aufzulösende Biegewellenlänge umgekehrt proportional zur Wurzel der Frequenz. Somit führt für durch Biegewellen dominierte Fragestellungen bereits eine geringe Vergrößerung der Elementkantenlänge zu wesentlichen Einschränkungen des möglichen Einsatzbereichs der vereinfachten Modelle. Die Nutzung einer analytischen Lösung, als Alternative zur Überführung der partiellen Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen, wird im dritten Beispiel anhand der Berechnung der Vertikalschwingungen eines Schwingfundaments untersucht. Das vereinfachte Modell wird auch hier in den Bereichen eingesetzt, in denen es mit ausreichender Qualität die Ergebnisse des Referenzmodells reproduziert und erzielt so eine Rechenzeiterparnis.

Die Verwendung von durch Variation des mathematischen Modells erzeugten vereinfachten Modellen wird anhand von zwei Beispielen betrachtet. Dazu werden vereinfachte Modelle durch Nutzung eines vereinfachten Materialmodells sowie durch Verwendung alternativer Elementformulierungen erzeugt. Für die Berechnung des Schalldruckpegels in einem Schalldämpfer mit porösem Material wird zur Modellierung des porösen Materials als Referenzmodell das Modell von BIOT verwendet. Dieses Modell berücksichtigt drei Wellentypen innerhalb des porösen Materials. Die Implementierung des Materials zur Nutzung in der FEM erfordert vier FHG je Elementknoten. Als vereinfachtes Modell wird ein äquivalentes Fluid verwendet. Es berücksichtigt nur einen Wellentyp und erfordert nur einen FHG je Elementknoten. Dadurch wird eine wesentliche Reduktion des entstehenden Gleichungssystems und somit des Berechnungsaufwands erzielt. Auch für diesen Anwendungsfall erzielt das entwickelte Multi-Modell-Verfahren eine wesentliche Rechenzeiterparnis bei einem geringen Fehler des Berechnungsergebnisses. Ebenso kann bei der Nutzung alternativer Elementformulierungen und damit der Beschränkung auf bestimmte, zu lösen-

de Differentialgleichungen der Berechnungsaufwand reduziert und durch Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens eine Rechenzeiterparnis erreicht werden. Die von der Variation des Realitätsmodells ausgehende Ableitung vereinfachter numerischer Modelle wird durch Vernachlässigung eines Teils des zu diskretisierenden Berechnungsgebiets untersucht. Der Fehler des durch die Vernachlässigung eines Teils des Berechnungsgebiets erzeugten vereinfachten Modells ist gering. Die so erzielte Reduktion des Berechnungsaufwands ist allerdings nicht ausreichend um die erforderlichen Validierungsprozesse zu kompensieren. Die Anwendung des Multi-Modell-Verfahrens führt in diesem Fall nicht zu einer Rechenzeiterparnis. Das entwickelte Multi-Modell-Verfahren erfordert mehr Rechenzeit als die direkte Lösung des Referenzmodells.

Neben der Verifikation des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens werden einige Eigenschaften des Verfahrens im Hinblick auf die Anwendung untersucht. Während der Berechnung werden die vereinfachten Modelle aufsteigend von den niedrigen zu den hohen Frequenzen validiert. Der Prozess wird abgebrochen, wenn eine erfolgreiche Validierung bei einer höheren Frequenz unwahrscheinlich wird. Der Prozess ist nicht deterministisch, das Berechnungsergebnis und die erzielbare Rechenzeiterparnis des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens werden unsicherheitsbehaftet. Eine exemplarische Untersuchung zeigt, dass diese Unsicherheit wenige Prozent beträgt und das Verfahren mit hoher Wahrscheinlichkeit eine Rechenzeiterparnis erzielt. Weiterhin wird der Einfluss der Anzahl vereinfachter Modelle auf die erzielbare Rechenzeiterparnis untersucht. Es zeigt sich, dass eher eine kleine Anzahl vereinfachter Modelle vorteilhaft ist, da bei vielen Modellen der Berechnungsaufwand für die Validierung den Vorteil durch die vereinfachten Modelle kompensiert. Die Validierung der Modelle erfolgt auf Basis im Rahmen dieser Arbeit definierter Validierungskriterien. Es werden zwei Untersuchungen zum Einfluss des gewählten Validierungskriteriums auf die Rechenzeiterparnis und den resultierenden Fehler der approximierten Systemantwort durchgeführt. Die erste Untersuchung betrachtet die Definition des Validierungskriteriums. Es zeigt sich, dass relative Kriterien zur Validierung der vereinfachten Modelle besser geeignet sind als absolute Maße. Für die Anwendung des Multi-Modell-Verfahrens in der Akustik lässt die Formulierung der Validierungskriterien als Pegelgröße eine gute Interpretierbarkeit für den Anwender zu. Die zweite Untersuchung betrachtet den Einfluss des zulässigen Fehlers an den Testpunkten auf die erzielbare Rechenzeiterparnis und den insgesamt erzielten Fehler. Grundsätzlich nimmt der aus der Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens resultierende Fehler mit dem an den Testpunkten tolerierten Fehler zu. Gleichzeitig nimmt auch die resultierende Rechenzeiterparnis zu. Somit ermöglicht dieser Parameter die Abwägung zwischen einer weniger genauen, effizienten Lösung und einer genauen Lösung mit geringer Rechenzeiterparnis. Diese Eigenschaft ist besonders für den Anwender wesentlich, um das Verfahren entsprechend der zu bearbeitenden Fragestellung nutzen zu können.

Die Verifikationsuntersuchungen und die Untersuchung der Eigenschaften des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens zeigen bereits die Nutzbarkeit des Verfahrens für einzelne FEM-Berechnungen. Weiterhin kann das entwickelte Multi-Modell-Verfahren zur Beschleunigung stochastischer Untersuchungen im Rahmen der Unsi-

cherheitsquantifizierung verwendet werden. Abschließend wird das Verfahren daher auf diesen Fall angewendet. Während der ersten Berechnung werden die möglichen Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle durch Validierungsprozesse identifiziert und die vereinfachten Modelle entsprechend ihrer Eignung eingesetzt. Dies erzielt in den meisten Fällen bereits eine Rechenzeiterparnis. Stochastische Untersuchungen im Rahmen der Unsicherheitsquantifizierung nutzen die vielfache Auswertung von Berechnungsmodellen mit unsicheren Eingangsparametern, um den Einfluss dieser Unsicherheit zu quantifizieren. Unter der Annahme, dass die Unsicherheit der Eingangsparameter die bei der ersten Berechnung ermittelten Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle nicht wesentlich beeinflusst, können die ermittelten Einsatzbereiche wiederverwendet werden. Dadurch werden die Validierungsprozesse obsolet und entfallen ab der zweiten Berechnung. Dies sichert eine große Rechenzeiterparnis für die stochastische Untersuchung insgesamt. Der Effekt ist selbst dann wirksam, wenn bei der ersten Berechnung nur eine geringe oder keine Rechenzeiterparnis erzielt wird. Das entwickelte Multi-Modell-Verfahren wird abschließend auf die Unsicherheitsquantifizierung mittels der Monte Carlo-Methode und die globale Sensitivitätsanalyse für die Berechnung des Schalldämm-Maßes einer doppelschaligen Wand angewendet. In beiden Fällen werden die ermittelten Größen, Mittelwert und Standardabweichung für die Unsicherheitsquantifizierung sowie die Sensitivitätskoeffizienten für die Sensitivitätsanalyse, mit einem geringen Fehler approximiert. Der Effekt der deutlichen Beschleunigung der Berechnung tritt ab der zweiten Berechnung ein.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens, mit dem das Ergebnis einer Berechnungsaufgabe durch Hinzunahme vereinfachter Modelle zu einem zu lösenden Referenzmodell mit einem Rechenzeitvorteil approximiert werden kann. Das Verfahren soll vor allem die speziellen Anforderungen der numerischen Berechnung mit Diskretisierungsverfahren in der Akustik berücksichtigen. Dieses Ziel wird mit dem vorgestellten Multi-Modell-Verfahren erreicht. Das Verfahren ist in der Lage die Eignung der vereinfachten Modelle durch einen Validierungsprozess zu bewerten und sie entsprechend ihrer Eignung anstelle des Referenzmodells einzusetzen. Die Kernannahme der Arbeit ist die Möglichkeit, vereinfachte Modelle anstelle des Referenzmodells einsetzen zu können und damit den Berechnungsaufwand zu reduzieren. Diese, der Hypothese Nummer 1 zugrundeliegende, Annahme wird bestätigt. Eine Rechenzeiterparnis wird erreicht. Das Verfahren ist als automatisierter Prozess etabliert, zur Laufzeit der Berechnung wird der Einsatz der Modelle geplant und das Berechnungsergebnis unter Verwendung der zur Verfügung stehenden Modelle ermittelt. Dies bestätigt Hypothese Nummer 2. Die Ableitung vereinfachter numerischer Modelle aus dem Referenzmodell kann auf allen Ebenen des Modellierungsprozesses umgesetzt werden. Dabei erzielen vor allem Variationen der Modellierung auf den späteren Ebenen des Modellierungsprozesses gute Ergebnisse. Auch Hypothese Nummer 3 wird daher weitgehend bestätigt. Die Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens im Rahmen stochastischer Untersuchungen bietet sich an, da die Ergebnisse der Validierungsprozesse wiederverwendet werden können. Die erzielbare Rechenzeiterparnis wird weiter erhöht. Dies bestätigt abschließend auch Hypothese

Nummer 4. Mit dem entwickelten Multi-Modell-Verfahren steht somit ein Verfahren zur Verfügung, dass für wellenauflösende Berechnungen mit der FEM in der Akustik geeignet ist und die speziellen Anforderungen der Akustik adressiert. Das Verfahren kann sowohl für eine einzelne Berechnung als auch bei stochastischen Untersuchungen angewendet werden und ist in der Lage, diese mit moderatem Fehler zu beschleunigen.

7. Ausblick

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Multi-Modell-Verfahren verwendet vereinfachte Modelle gemeinsam mit einem Referenzmodell. Dies führt zu einer Approximation der Lösung und in den meisten Fällen zur Reduktion der erforderlichen Rechenzeit. In der vorgestellten Umsetzung des Verfahrens werden die vereinfachten Modelle als gegeben betrachtet. Der zur Erzeugung der Modelle erforderliche Aufwand wird bisher nicht berücksichtigt. Dennoch ist gerade die Modellierung einer Fragestellung eine für den Anwender aufwändige Tätigkeit. Dieser Aufwand wird aufgrund der Nutzung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens noch erhöht, da zusätzliche, vereinfachte Modelle erzeugt werden müssen. Letztlich wird die Rechenzeiterparnis somit durch Erhöhung des Aufwands für den Anwender erzielt. Diese Eigenschaft ist analog zu ähnlichen Vorschlägen, beispielsweise den in [104] vorgestellten Multi-Fidelity-Verfahren. Dennoch sollte dieser Aspekt bei der Weiterentwicklung des Verfahrens eine wesentliche Rolle spielen. Die Beschränkung auf die Variation des numerischen Modells durch Variation der Diskretisierung bietet eine Möglichkeit zur Umgehung dieser Herausforderung. Dabei ermöglicht die Nutzung der automatisierten Diskretisierung die Erzeugung weiterer Modelle ohne wesentlichen Zusatzaufwand für den Anwender. Gegenüber der Nutzung alternativer Diskretisierungen erfordert die Ableitung vereinfachter mathematischer Modelle ein höheres Maß an Fachwissen seitens des Anwenders. Hier wäre eine Kopplung zu Datenbanken und Wissensmanagementsystemen denkbar, die eine Unterstützung bei der geeigneten Auswahl der Elementformulierung oder dem Materialmodell bieten. Weiterhin könnten über derartige Systeme bereits vorhandene, vereinfachte Modelle bereitgestellt werden. Dies wäre denkbar, wenn als vereinfachte Modelle so genannte Surrogate oder Metamodelle verwendet werden.

Neben der Bereitstellung der vereinfachten Modelle ist der Einsatz der Modelle im Frequenzbereich ein Aspekt für eine mögliche Weiterentwicklung. In der vorgestellten Version der Modell-Management-Strategie werden die vereinfachten Modelle im gesamten Frequenzbereich validiert. Von diesem Konzept wird nur abgewichen, wenn die Abbruchkriterien zur Verkürzung des Validierungsprozesses greifen. Allerdings kann für viele Anwendungsfälle bereits im Vorfeld abgeschätzt werden, in welchen Frequenzbereich ein vereinfachtes Modell eher einsetzbar ist, bzw. in welchen Frequenzbereichen eine erfolgreiche Validierung unwahrscheinlich ist. Ein Beispiel wird mit der Kopplung der analytischen Lösung zur Berechnung der Systemantwort des Schwingfundaments gezeigt. Hier ist bereits im Vorfeld bekannt, dass das Modell oberhalb der ersten vertikalen Eigenfrequenz keine Anwendung finden kann. Dieses „Expertenwissen“ könnte in die Modell-Management-Strategie aufgenommen wer-

den, dadurch werden bereits im Vorfeld unnötige Berechnungsschritte vermieden. Die mögliche Rechenzeiterparnis könnte damit deutlich erhöht werden.

Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung bietet auch die vorgestellte Budgetplanung. In der vorgestellten Version ist eine negative Rechenzeiterparnis möglich und wird in Kauf genommen. Dieses Vorgehen gewährt im Rahmen der vorliegenden Arbeit Einsichten in die Eigenschaften des Verfahrens. Der Einsatz der zur Verfügung stehenden Modelle wird auf Basis der Kosten der Modelle geplant. Bereits zu diesem, sehr frühen, Zeitpunkt der Berechnung ist bekannt, ob eine negative Rechenzeiterparnis wahrscheinlich ist. Hier ist somit eine Anpassung des Verfahrens sinnvoll, um eine negative Rechenzeiterparnis möglichst zu minimieren. Allerdings kann dieser Fall nicht völlig eliminiert werden, da die vereinfachten Modelle zur Ermittlung der Kosten mindestens einmal ausgewertet werden müssen. Wird danach nur noch das Referenzmodell verwendet, so fallen diese Kosten trotzdem an und können nicht kompensiert werden. Eine Option wäre hier die Schätzung der Kosten der Modelle nicht anhand der jeweils erforderlichen Rechenzeit, sondern beispielsweise auf Basis der zu berechnenden Freiheitsgrade. Allerdings ist dieser Ansatz nur innerhalb einer Berechnungsmethode gültig, beispielsweise zum Vergleich zweier mit der FEM zu lösender Modelle.

Der intuitive Ansatz der auf den Kosten der zur Verfügung stehenden Modelle basierenden Budgetplanung führt weiterhin dazu, dass die Rechenzeiterparnis nicht prognostiziert werden kann. Dabei resultiert eine Fehleinschätzung der Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle in einer negativen Rechenzeiterparnis. Hier bietet die Entwicklung geeigneter Fehlerschätzer eine Möglichkeit, um im Vorfeld der Berechnung eine genauere Aussage über den Einsatz der vereinfachten Modelle zu ermöglichen. Dadurch könnte die erzielbare Rechenzeiterparnis bereits früh prognostiziert werden. In Verbindung mit den bereits erwähnten Möglichkeiten der automatisierten Erzeugung vereinfachter Modelle könnte ein Prozess entwickelt werden, der im Vorfeld der Berechnung durch die Erzeugung geeigneter vereinfachter Modelle die Rechenzeiterparnis maximiert. Weiterhin könnte diese, auf Fehlerschätzern basierende, Planung des Einsatzes der vereinfachten Modelle die aktuell zufallsbasierte Abbruchentscheidung des Validierungsprozesses ablösen. Das resultierende Verfahren wäre damit wieder deterministisch. Dadurch könnte die Vergleichbarkeit zwischen verschiedenen Implementierungen des Verfahrens vereinfacht werden.

Weiterhin zeigen die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen, dass der insgesamt aus der Nutzung des vorgestellten Multi-Modell-Verfahrens resultierende Fehler im Vorfeld der Berechnung nicht prognostiziert werden kann. Der resultierende Fehler ist grundsätzlich an den an den Testpunkten tolerierten Fehler gekoppelt. Diese Kopplung gilt jedoch nur innerhalb eines Validierungskriteriums und nur qualitativ insofern, als ein hoher an den Testpunkten tolerierter Fehler mit einem hohen Fehler des Berechnungsergebnisses insgesamt korreliert. Die Entwicklung geeigneter Fehlerschätzer könnte, in Verbindung mit einer angepassten Budgetplanung, dem Anwender eine präzisere Abwägung zwischen der Genauigkeit der Lösung und der erzielten Rechenzeiterparnis ermöglichen.

Abschließend sei noch auf die Einbeziehung vereinfachter Modelle gemeinsam mit einem Referenzmodell hingewiesen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden, mit Ausnahme der analytisch formulierten Modelle, nur vereinfachte Modelle verwendet, die ebenfalls mittels der FEM gelöst werden. Dazu wird dieselbe Software wie für das Referenzmodell verwendet. Grundsätzlich bietet das Verfahren die Möglichkeit der Kopplung beliebiger Modelle. In Abschnitt 3.3 werden die Anforderungen an die zu verwendenden Modelle formuliert. Als dritte Forderung wird ein „Black-Box-Verhalten“ gefordert, sodass das Verfahren nur unter Nutzung der Ein- und Ausgangsgrößen der Modelle angewendet werden kann. Durch die Verwendung der identischen Software für die vorliegenden Berechnungen ist die Kompatibilität der zu vergleichenden Ausgangsgrößen implizit sicher gestellt. Werden andere Berechnungsverfahren zur Erzeugung der vereinfachten Modelle und somit andere Berechnungsprogramme verwendet, so ist die Kompatibilität der Ausgangsgrößen nicht notwendigerweise gewährleistet. Daher ist eine weitere Herausforderung die Definition und Nutzung einheitlicher Formate und Schnittstellen zur Übergabe der Ergebnisgrößen von den vereinfachten Modellen an die Modell-Management-Strategie. Die umgesetzte Implementierung des Multi-Modell-Verfahrens umgeht diesen Schritt, indem die Nutzung der vereinfachten Modelle durch den Aufruf einer Programmfunktion erfolgt. Diese Programmfunktion wird so gestaltet, dass die zurückgegebenen Daten bereits in dem korrekten Format vorliegen. Dies wird für die analytisch formulierten, vereinfachten Modelle bereits verwendet. Für andere Berechnungsverfahren erfordert diese Programmfunktion in der vorgestellten Version noch die Ausgestaltung durch den Anwender, um die Kompatibilität der Ergebnisse zu der implementierten Modell-Management-Strategie herzustellen. Dieser Schritt könnte durch einheitliche Datenformate umgangen werden.

Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, L.: *Simulation der Schalltransmission durch Wände*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2002
- [2] ALEXANDROV, N. ; NIELSEN, E. ; LEWIS, R. ; ANDERSON, W.: First-order model management with variable-fidelity physics applied to multi-element airfoil optimization. In: *8th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 2000, S. 4886
- [3] ALEXANDROV, N. M. ; LEWIS, R. M. ; GUMBERT, C. R. ; GREEN, L. L. ; NEWMAN, P. A.: Approximation and model management in aerodynamic optimization with variable-fidelity models. In: *Journal of Aircraft* 38 (2001), Nr. 6, S. 1093–1101
- [4] ALLARD, J. ; ATALLA, N.: *Propagation of sound in porous media: modelling sound absorbing materials 2e*. John Wiley & Sons, 2009
- [5] ASTM E2611-17: Standard Test Method for Normal Incidence Determination of Porous Material Acoustical Properties Based on the Transfer Matrix Method / ASTM International, West Conshohocken, PA. 2017 (ASTM E2611-17). – ASTM Standard.
- [6] ATALLA, N. ; HAMDI, M. A. ; PANNETON, R.: Enhanced weak integral formulation for the mixed (u_- , p_-) poroelastic equations. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 109 (2001), Nr. 6, S. 3065–3068
- [7] ATALLA, N. ; PANNETON, R. ; DEBERGUE, P.: A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 104 (1998), Nr. 3, S. 1444–1452
- [8] ATALLA, Y. ; PANNETON, R.: Inverse acoustical characterization of open cell porous media using impedance tube measurements. In: *Canadian Acoustics* 33 (2005), Nr. 1, S. 11–24
- [9] BABUŠKA, I. ; ODEN, T. J.: Verification and validation in computational engineering and science: basic concepts. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 36, S. 4057–4066
- [10] BANGERTH, W. ; RANNACHER, R.: Finite element approximation of the acoustic wave equation: Error control and mesh adaptation. In: *East West Journal of Numerical Mathematics* 7 (1999), Nr. 4, S. 263–282

- [11] BANGERTH, W. ; RANNACHER, R.: Adaptive finite element techniques for the acoustic wave equation. In: *Journal of Computational Acoustics* 9 (2001), Nr. 02, S. 575–591
- [12] BASERMANN, A.: Iterative Verfahren für dünnbesetzte Matrizen zur Lösung technischer Probleme auf massiv-parallelen Systemen. Jülich : Forschungszentrum Jülich, Zentralbibliothek, 1995 (Jül 3015). – Forschungsbericht. Zugl.: Aachen, Techn. Hochsch., Diss., 1994
- [13] BATHE, Klaus-Jürgen: *Finite element procedures*. K.-J. Bathe, 2006
- [14] BAUR, U. ; BENNER, P. ; FENG, L.: Model order reduction for linear and non-linear systems: a system-theoretic perspective. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 21 (2014), Nr. 4, S. 331–358
- [15] BAUSYS, R. ; WIBERG, N.-E.: Adaptive finite element strategy for acoustic problems. In: *Journal of Sound and Vibration* 226 (1999), Nr. 5, S. 905–922
- [16] BECK, S. C.: *Strömungsinduzierter Körperschalleintrag in Strukturen mit porösen Oberflächen*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2012
- [17] BENNER, P.: Numerical linear algebra for model reduction in control and simulation. In: *GAMM-Mitteilungen* 29 (2006), Nr. 2, S. 275–296
- [18] BENNER, P. ; QUINTANA-ORTÍ, E. S. ; QUINTANA-ORTÍ, G.: Balanced truncation model reduction of large-scale dense systems on parallel computers. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 6 (2000), Nr. 4, S. 383–405
- [19] BENNER, P. ; SAAK, J.: Efficient balancing-based MOR for large-scale second-order systems. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 17 (2011), Nr. 2, S. 123–143
- [20] BENNEWITZ, R. ; STROBACH, N.: Kann man Atome sehen? In: *Physik Journal* 3 (2015), Nr. 14, S. 37–42
- [21] BERGMAN, D. R.: *Computational acoustics : theory and implementation*. Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, Inc, 2018 (Wiley series in acoustics, noise and vibration). – ISBN 978-1-119-27728-6
- [22] BHATTACHARYYA, A.: On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions. In: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 35 (1943), S. 99–109
- [23] BIOT, M. A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 28 (1956), Nr. 2, S. 168–178
- [24] BIOT, M. A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 28 (1956), Nr. 2, S. 179–191

-
- [25] BIPM, IEC AND IFCC, ILAC AND IUPAC, IUPAP AND ISO, OIML: Evaluation of measurement data—guide for the expression of uncertainty in measurement. JCGM 100: 2008. 2008 (JCGM100:2008). – Guide.
- [26] BLECH, C. ; SHI, X. ; LANGER, S.: Über die Sensitivität des FRAC für eine objektive Validierung mechanischer Modelle. In: *Fortschritte der Akustik – DAGA 2016*. Aachen, Germany : Deutsche Gesellschaft für Akustik, DEGA, 2016, S. 859–862
- [27] BRIGGS, W. L. ; MCCORMICK, S. F. u. a.: *A multigrid tutorial*. Bd. 72. Siam, 2000
- [28] BUNGARTZ, H.-J. ; ZIMMER, S. ; BUCHHOLZ, M. ; PFLÜGER, D.: *Modellbildung und Simulation: eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag, 2009
- [29] BUSSE, A.: *Zur Modellierung plattenförmiger Bauteile*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2008
- [30] CAFLISCH, R. E.: Monte carlo and quasi-monte carlo methods. In: *Acta numerica* 7 (1998), S. 1–49
- [31] CHAMPOUX, Yvan ; ALLARD, Jean-F.: Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. In: *Journal of Applied Physics* 70 (1991), Nr. 4, S. 1975–1979
- [32] CHEN, S.-H. ; PAN, H. H.: Guyan reduction. In: *Communications in applied numerical methods* 4 (1988), Nr. 4, S. 549–556
- [33] CHLADNI, E. F. F.: *Die Akustik*. Breitkopf & Härtel, 1830
- [34] COX, D. C. ; BAYBUTT, P.: Methods for Uncertainty Analysis: A Comparative Survey. In: *Risk Analysis* 1 (1981), Nr. 4, S. 251–258
- [35] COX, M. G. ; SIEBERT, B. R. L.: The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. In: *Metrologia* 43 (2006), Nr. 4, S. S178
- [36] COZAD, A. ; SAHINIDIS, N. V. ; MILLER, D. C.: Learning surrogate models for simulation-based optimization. In: *AIChE Journal* 60 (2014), Nr. 6, S. 2211–2227
- [37] CRAIG, R.: Coupling of substructures for dynamic analyses-an overview. In: *41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, 2000, S. 1573
- [38] CRAIG, R. ; BAMPTON, M.: Coupling of substructures for dynamic analyses. In: *AIAA journal* 6 (1968), Nr. 7, S. 1313–1319
- [39] CREMER, L. ; HECKL, M.: *Körperschall: physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer-Verlag, 2013
-

- [40] DERPANIS, K. G.: The bhattacharyya measure. In: *Mendeley Computer* 1 (2008), Nr. 4, S. 1990–1992
- [41] DESCARTES, R.: *Die Prinzipien der Philosophie*. F. Meiner, 1908
- [42] DIN EN 29053:1993-05: Akustik; Materialien für akustische Anwendungen; Bestimmung des Strömungswiderstandes (ISO 9053:1991); Deutsche Fassung EN 29053:1993 / Deutsches Institut für Normung. 1993 (DIN EN 29053:1993-05). – Deutsche Norm.
- [43] DIN EN ISO 10140-1:2010-12: Akustik – Messung der Schalldämmung von Bauteilen im Prüfstand – Teil 2: Messung der Luftschalldämmung (ISO 10140-2:2010); Deutsche Fassung EN ISO 10140-2:2010 / Deutsches Institut für Normung. 2010 (DIN EN ISO 10140-1:2010-12). – Deutsche Norm.
- [44] DIN EN ISO 10534-1:2001-10: Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren - Teil 1: Verfahren mit Stehwellenverhältnis (ISO 10534-1:1996); Deutsche Fassung EN ISO 10534-1:2001 / Deutsches Institut für Normung. 2001 (DIN EN ISO 10534-2:2001-10). – Deutsche Norm.
- [45] DIN EN ISO 10534-2 BERICHTIGUNG 1:2007-11: Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren - Teil 2: Verfahren mit Übertragungsfunktion (ISO 10534-2:1998); Deutsche Fassung EN ISO 10534-2:2001, Berichtigungen zu DIN EN ISO 10534-2:2001-10 / Deutsches Institut für Normung. 2007 (DIN EN ISO 10534-2 Berichtigung 1:2007-11). – Deutsche Norm.
- [46] DIN EN ISO 10534-2:2001-10: Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren - Teil 2: Verfahren mit Übertragungsfunktion (ISO 10534-2:1998); Deutsche Fassung EN ISO 10534-2:2001 / Deutsches Institut für Normung. 2001 (DIN EN ISO 10534-2:2001-10). – Deutsche Norm.
- [47] DIN EN ISO 1683:2015: Akustik – Bevorzugte Bezugswerte für Pegel in der Akustik und Schwingungstechnik (ISO 1683:2015); Deutsche Fassung EN ISO 1683:2015 / Deutsches Institut für Normung. 2015 (DIN EN ISO 1683:2015). – Deutsche Norm.
- [48] DOUTRES, O. ; SALISSOU, Y. ; ATALLA, N. ; PANNETON, R.: Evaluation of the acoustic and non-acoustic properties of sound absorbing materials using a three-microphone impedance tube. In: *Applied Acoustics* 71 (2010), Nr. 6, S. 506 – 509. – ISSN 0003-682X
- [49] FEINBERG, J. ; LANGTANGEN, H. P.: Chaospy: An open source tool for designing methods of uncertainty quantification. In: *Journal of Computational Science* 11 (2015), S. 46 – 57. – ISSN 1877-7503
- [50] FERNÁNDEZ-GODINO, G. M. ; PARK, C. ; KIM, N.-H. ; HAFITKA, R. T.: Review of multi-fidelity models. In: *arXiv preprint arXiv:1609.07196* (2016)

- [51] FISHER, R. A.: The design of experiments. (1935)
- [52] FORBES, C. ; EVANS, . ; HASTINGS, N. ; PEACOCK, B.: *Statistical distributions*. John Wiley & Sons, 2011
- [53] FORMAGGIA, L. ; GUADAGNINI, A. ; IMPERIALI, I. ; LEVER, V. ; PORTA, G. ; RIVA, . ; SCOTTI, A. ; TAMELLINI, L.: Global sensitivity analysis through polynomial chaos expansion of a basin-scale geochemical compaction model. In: *Computational Geosciences* 17 (2013), Feb, Nr. 1, S. 25–42. – ISSN 1573-1499
- [54] FRANCK, S. A.: *Finite-Elemente-Methoden, Lösungsalgorithmen und Werkzeuge für die akustische Simulationstechnik*, RWTH Aachen, Dissertation, 2009
- [55] FRASER, D. A. S.: *Statistics-An Introduction*. John Wiley And Sons, Inc; New York, 1958
- [56] FRITSCHI, L. ; BROWN, A. L. ; KIM, R. ; SCHWELA, D. ; KEPHALOPOULOS, S.: Burden of disease from environmental noise / World Health Organization (WHO). 2011. – Report.
- [57] GAO, F. ; HAN, L.: Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters. In: *Computational Optimization and Applications* 51 (2012), Jan, Nr. 1, S. 259–277. – ISSN 1573-2894
- [58] GILJOHANN, D.: Mesh coarsening for the finite and the boundary element method in acoustics. In: *Journal of Computational Acoustics* 11 (2003), Nr. 03, S. 351–361
- [59] GIUNTA, A. ; WOJTKIEWICZ, S. ; ELDRED, M.: Overview of modern design of experiments methods for computational simulations. In: *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2003, S. 649
- [60] GÖRANSSON, P.: A 3-D, symmetric, finite element formulation of the Biot equations with application to acoustic wave propagation through an elastic porous medium. In: *International journal for numerical methods in engineering* 41 (1998), Nr. 1, S. 167–192
- [61] GUIVER, C. ; OPMEER, M.: Model Reduction by Balanced Truncation for Systems with Nuclear Hankel Operators. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 52 (2014), Nr. 2, S. 1366–1401
- [62] GUYADER, J.-L.: Characterization and reduction of dynamic models of vibrating systems with high modal density. In: *Journal of Sound and Vibration* 328 (2009), Nr. 4, S. 488 – 506. – ISSN 0022-460X
- [63] GUYAN, R. J.: Reduction of stiffness and mass matrices. In: *AIAA journal* 3 (1965), Nr. 2, S. 380–380
- [64] HACKING, I.: *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften*. Reclam Stuttgart, 1996

- [65] HAMBRIC, S. A. ; SUNG, S. H. ; NEFSKE, D. J.: *Engineering Vibroacoustic Analysis: Methods and Applications*. John Wiley & Sons, 2016
- [66] HARARI, I. ; GROSH, K. ; HUGHES, T. J. R. ; MALHOTRA, M. ; PINSKY, P. M. ; STEWART, J. R. ; THOMPSON, L. L.: Recent developments in finite element methods for structural acoustics. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 3 (1996), Nr. 2-3, S. 131–309
- [67] HERMAN, J. ; USHER, W.: SALib: An open-source Python library for Sensitivity Analysis. In: *The Journal of Open Source Software* 2 (2017), 01, Nr. 9
- [68] HERR, M. ; ROSSIGNOL, K.-S. ; DELFS, J. ; LIPPITZ, N. ; MÖSSNER, M.: Specification of porous materials for low-noise trailing-edge applications. In: *20th AIAA/CEAS aeroacoustics conference*, 2014, S. 3041
- [69] HÄRING, I.: *Risk Analysis and Management: Engineering Resilience*. 1st ed. 2015. s.l. : Springer-Verlag, 2015. – ISBN 978-981-10-0015-7
- [70] J., Gokulakrishnan ; G., Saravana K.: Surrogate Based Sensitivity Analysis of Part Strength due to Process Parameters in Fused Deposition Modelling. In: *Procedia Computer Science* 133 (2018), S. 772 – 778. – International Conference on Robotics and Smart Manufacturing (RoSMa2018). – ISSN 1877-0509
- [71] JACQUEZ, J. A.: Design of experiments. In: *Journal of the Franklin Institute* 335 (1998), Nr. 2, S. 259–279
- [72] JENSEN, S.: *Erkenntnis—Konstruktivismus—Systemtheorie: Einführung in die Philosophie der konstruktivistischen Wissenschaft*. Springer-Verlag, 2013
- [73] JONES, E. ; OLIPHANT, T. ; PETERSON, P. u. a.: *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001–. – URL <http://www.scipy.org/>. – [Online; accessed 01.06.2019]
- [74] KAJISHIMA, T. ; TAIRA, K.: *Computational fluid dynamics: incompressible turbulent flows*. Springer, 2016
- [75] KIDDER, R. L.: Reduction of structural frequency equations. In: *AIAA journal* 11 (1973), Nr. 6, S. 892–892
- [76] KLEIJNEN, J. P. C.: Kriging metamodeling in simulation: A review. In: *European journal of operational research* 192 (2009), Nr. 3, S. 707–716
- [77] KOLLMANN, F. G. ; SCHÖSSER, T. F. ; ANGERT, R.: *Praktische Maschinenakustik*. Springer, 2006
- [78] KOLMOGOROFF, A.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (2)*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1933 (Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete). – ISBN 978-3-642-49888-6

- [79] KOSCHNICK, F.: *Geometrische Locking-Effekte bei finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*, Technische Universität München, Dissertation, 2004
- [80] KOUTSOVASILIS, P. ; BEITELSCHMIDT, M.: Comparison of model reduction techniques for large mechanical systems. In: *Multibody System Dynamics* 20 (2008), Nr. 2, S. 111–128
- [81] LA BOURDONNAYE, A. de ; FARHAT, C. ; MACEDO, A. ; MAGOULES, F. ; ROUX, F.-X. u. a.: A Non-Overlapping Domain Decomposition Method for the Exterior Helmholtz Problem. In: *Contemporary Mathematics* 218 (1998), S. 42–66
- [82] LANGER, S.: *Schalltransmission durch Isolierverglasung*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2001
- [83] LARSEN, R. J. ; MARX, M. L. u. a.: *An introduction to mathematical statistics and its applications*. Bd. 2. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1986
- [84] LEE, S. H. ; CHEN, W.: A comparative study of uncertainty propagation methods for black-box-type problems. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37 (2009), Nr. 3, S. 239
- [85] LERCH, R. ; SESSLER, G. ; WOLF, D.: *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2009
- [86] LIN, G. ; ENGEL, D. W. ; ESLINGER, P. W.: Survey and evaluate uncertainty quantification methodologies. In: *Pacific Northwest National Laboratory, Richland, WA, Report No. PNNL-20914* (2012)
- [87] LIU, H. ; JIAO, D.: Performance analysis of the H-matrix-based fast direct solver for finite-element-based analysis of electromagnetic problems. In: *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2009. APSURSI'09. IEEE IEEE* (Veranst.), 2009, S. 1–4
- [88] LOCKE, J.: *An essay concerning human understanding*. 1841
- [89] MADENCI, E. ; GUVEN, I.: *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®*. 2nd ed. 2015. Boston, MA : Springer US, 2015. – 657 S. – ISBN 978-1-4899-7550-8
- [90] MAGLIE, P.: Anwendung von FE-basierten Reduktionsmethoden. In: *Fachtagung: Mechatronik. VDI Wissensforum* (2009)
- [91] MARBURG, S.: Six boundary elements per wavelength: is that enough? In: *Journal of Computational Acoustics* 10 (2002), Nr. 01, S. 25–51
- [92] MARBURG, S.: Discretization requirements: How many elements per wavelength are necessary? In: *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids-Finite and Boundary Element Methods*. Springer, 2008, S. 309–332

- [93] MATHAI, A. M. ; HAUBOLD, H. J.: *Probability and Statistics : A Course for Physicists and Engineers*. Berlin ;Boston : De Gruyter, 2017 (De Gruyter Textbook). – 604 S. – Open Access under a CC BY-NC-ND 4.0 license. – ISBN 978-3-11-056253-8
- [94] MENBERG, K. ; HEO, Y. ; CHOUDHARY, R.: Sensitivity analysis methods for building energy models: Comparing computational costs and extractable information. In: *Energy and Buildings* 133 (2016), S. 433–445
- [95] MÖSER, M.: *Technische Akustik*. Bd. 8. Springer, 2009
- [96] MUKKULA, A. R. G. ; PAULEN, R.: Model-based design of optimal experiments for nonlinear systems in the context of guaranteed parameter estimation. In: *Computers & Chemical Engineering* 99 (2017), S. 198–213
- [97] OEHLERT, G. W.: *A first course in design and analysis of experiments*. 2010
- [98] OLYN, X. ; PANNETON, R.: Acoustical determination of the parameters governing thermal dissipation in porous media. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 123 (2008), Nr. 2, S. 814–824
- [99] PALAR, P. S. ; ZUHAL, L. R. ; SHIMOYAMA, K. ; TSUCHIYA, T.: Global sensitivity analysis via multi-fidelity polynomial chaos expansion. In: *Reliability Engineering & System Safety* 170 (2018), S. 175–190
- [100] PANNETON, R. ; ATALLA, N.: Numerical prediction of sound transmission through finite multilayer systems with poroelastic materials. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 100 (1996), Nr. 1, S. 346–354
- [101] PANNETON, R. ; ATALLA, N.: An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 101 (1997), Nr. 6, S. 3287–3298
- [102] PANNETON, R. ; OLYN, X.: Acoustical determination of the parameters governing viscous dissipation in porous media. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 119 (2006), Nr. 4, S. 2027–2040
- [103] PAPADAKIS, N. M. ; STAVROULAKIS, G. E.: Effect of Mesh Size for Modeling Impulse Responses of Acoustic Spaces via Finite Element Method in the Time Domain. In: *Euronoise 2018* (2018)
- [104] PEHERSTORFER, B. ; WILLCOX, K. ; GUNZBURGER, M.: Optimal model management for multifidelity Monte Carlo estimation. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 38 (2016), Nr. 5, S. A3163–A3194
- [105] PEHERSTORFER, B. ; WILLCOX, K. ; GUNZBURGER, M.: Survey of multifidelity methods in uncertainty propagation, inference, and optimization. In: *SIAM Review* 60 (2018), Nr. 3, S. 550–591
- [106] POPPER, K.: *The logic of scientific discovery*. Routledge, 2005
- [107] POSER, H.: *Wissenschaftstheorie*. Reclam Stuttgart, 2012

-
- [108] RAY, S.: On a theoretical property of the bhattacharyya coefficient as a feature evaluation criterion. In: *Pattern Recognition Letters* 9 (1989), Nr. 5, S. 315 – 319. – ISSN 0167-8655
- [109] ROSS, S. M.: *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. Academic Press, 2014
- [110] ROY, C. J. ; OBERKAMPF, W. L.: A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 200 (2011), Nr. 25-28, S. 2131–2144
- [111] SAAD, Y. ; SCHULTZ, M.: GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 7 (1986), Nr. 3, S. 856–869
- [112] SALTELLI, A. ; RATTO, M. ; ANDRES, T. ; CAMPOLONGO, F. ; CARIBONI, J. ; GATELLI, D. ; SAISANA, M. ; TARANTOLA, S.: *Global sensitivity analysis: the primer*. John Wiley & Sons, 2008
- [113] SALTELLI, A. ; TARANTOLA, S. ; CAMPOLONGO, F. ; RATTO, M.: *Sensitivity analysis in practice: a guide to assessing scientific models*. John Wiley & Sons, 2004
- [114] SCHILLING, M. A. ; HILL, C. W. L.: Managing the new product development process: Strategic imperatives. In: *Academy of Management Perspectives* 12 (1998), Nr. 3, S. 67–81
- [115] SCHMIECHEN, P.: *Travelling-Wave Speed Coincidence*, University of London, Dissertation, 1997
- [116] SOBOL, I. M.: Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. In: *Mathematical modelling and computational experiments* 1 (1993), Nr. 4, S. 407–414
- [117] SONNEVELD, P.: CGS, A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear systems. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 10 (1989), Nr. 1, S. 36–52
- [118] STACHOWIAK, H.: *Allgemeine Modelltheorie*. (1973)
- [119] STEPHAN, P.: *Einstoffsysteme*. 19., erg. Aufl. Berlin u.a. : Springer Vieweg, 2013 (Thermodynamik). – URL <http://www.gbv.de/dms/tib-ub-hannover/757234216.pdf>. – Access date: 2019-05-20. – ISBN 3-642-30097-9
- [120] SUDRET, B.: Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. In: *Reliability Engineering & System Safety* 93 (2008), Nr. 7, S. 964 – 979. – Bayesian Networks in Dependability. – ISSN 0951-8320
- [121] SZABÓ, B. ; SZABO, B. A. ; BABUŠKA, I.: *Finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1991
-

- [122] TIAN, W.: A review of sensitivity analysis methods in building energy analysis. In: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 20 (2013), S. 411–419
- [123] TRÖGER, P.: *Quantifizierung von Unsicherheit*. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2018. – ISBN 978-3-658-23341-9
- [124] TYCHSEN, J. ; LIPPITZ, N. ; RÖSLER, J.: Modification of Porous Aluminum by Cold Rolling for Low-Noise Trailing Edge Applications. In: *Metals* 8 (2018), Nr. 8. – ISSN 2075-4701
- [125] VAJNA, S. ; WEBER, C. ; BLEY, H. ; ZEMAN, K.: *CAX für Ingenieure: eine praxisbezogene Einführung*. Springer-Verlag, 2009
- [126] VAN FRAASSEN, B. C.: *The scientific image*. Oxford University Press, 1980
- [127] ZELLER, P.: Handbuch Fahrzeugakustik. In: *Grundlagen, Auslegung, Berechnung, Versuch* 2 (2009)
- [128] ZHELEZINA, E.: *Adaptive finite element method for the numerical simulation of electric, magnetic and acoustic fields*, Universität Erlangen-Nürnberg, Dissertation, 2005
- [129] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; NITHIARASU, P.: Chapter 11 - Long and Medium Waves. In: ZIENKIEWICZ, O.C. (Hrsg.) ; TAYLOR, R. L. (Hrsg.) ; NITHIARASU, P. (Hrsg.): *The Finite Element Method for Fluid Dynamics (Seventh Edition)*. Seventh Edition. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2014, S. 355 – 388. – ISBN 978-1-85617-635-4
- [130] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; ZHU, J. Z.: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals: Its Basis and Fundamentals. In: *Butterworth-Heinemann* 132 (2005), S. 1987–1993
- [131] ZWIKKER, C. ; KOSTEN, C. W.: *Sound absorbing materials / by C. Zwikker and C.W. Kosten*. Elsevier New York, 1949. – ix, 174 p. : S

Abbildungsverzeichnis

1.1. Der Modellierungsprozess im Rahmen numerischer Berechnungen . .	5
3.1. Frequenzgang der mittleren quadratischen Schnelle bei Verwendung vier verschiedener Diskretisierungen	52
3.2. Verwendete Ansätze zur Definition von Frequenzgruppen	59
3.3. Vergleich der Systemantworten zweier Modelle an Testpunkten . . .	60
3.4. Messung der Überlappung von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen	64
3.5. Variation der geschätzten Modellanteile an der Gesamtlösung und resultierende Ersparnis	73
3.6. Verwendung von mindestens drei Testpunkten zur Validierung	74
3.7. Variation der Frequenzauflösung eines Frequenzgangs und ermittelte Frequenzgruppen	78
3.8. Der Algorithmus des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens als Ab- laufdiagramm	80
3.9. Strategie zur Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens in der Unsicher- heitsquantifizierung	83
4.1. Geometrie der Fensterscheibe, Variation des numerischen Modells . .	90
4.2. Variierte Diskretisierungen als Beispiel der Variation des numerischen Modells	92
4.3. Vergleich der berechneten Schwingschnelle bei Variation des numeri- schen Modells	93
4.4. Geometrie des Impedanzrohrs, Variation des numerischen Modells .	95
4.5. Vergleich des berechneten Schalldruckpegels bei Variation des nume- rischen Modells	98
4.6. Geometrie des Schwingfundaments, Variation des numerischen Modells	100
4.7. Vergleich der berechneten Schwingschnelle bei Nutzung einer analy- tischen Lösung	102
4.8. Geometrie der Platte, Variation des mathematischen Modells	105
4.9. Vergleich der berechneten Schwingschnelle bei Variation des mathe- matischen Modells	107
4.10. Vergleich der berechneten Schwingschnelle bei Variation des mathe- matischen Modells	110
4.11. Geometrie des Schalldämpfers, Variation des mathematischen Modells	113
4.12. Werte der komplexen Schallgeschwindigkeit und der effektiven Dichte für das als äquivalentes Fluid modellierte poröse Material	115

4.13. Vergleich des berechneten Schalldruckpegels bei Variation des mathematischen Modells	116
4.14. Geometrie der Doppelverglasung, Variation des Realitätsmodells	118
4.15. Vergleich der mittleren quadratischen Schnelle bei Variation des Realitätsmodells	121
4.16. Geometrie der Platte zur Untersuchung der Eigenschaften des Multi-Modell-Verfahrens	125
4.17. Relative Rechenzeit bei Variation der Anzahl vereinfachter Modelle	128
4.18. Verteilung der relativen Rechenzeit (100 Berechnungen)	129
4.19. Einfluss des gewählten Validierungskriteriums	132
4.20. Einfluss des an den Testpunkten tolerierten Fehlers	135
5.1. Geometrie der doppelschaligen Wand zur Unsicherheitsquantifizierung	144
5.2. Vergleich von Mittelwert und Standardabweichung des Schalldämm-Maßes der doppelschaligen Wand	149
5.3. Vergleich der Rechenzeiten für die Unsicherheitsquantifizierung mit dem Multi-Modell-Verfahren	151
5.4. Totale Sensitivitätskoeffizienten des Schalldämm-Maßes	152
5.5. Fehler der totalen Sensitivitätskoeffizienten	154
5.6. Rechenzeit für die globale Sensitivitätsanalyse mit dem Multi-Modell-Verfahren	155
A.1. Schematischer Ablauf der inversen Parameterbestimmung	187
A.2. Frequenzgang des Absorptionsgrades des porösen Aluminiums; Messung, BIOT-Modell und äquivalentes Fluid	187
C.1. Vergleich der berechneten Schwingschnelle, Variation des numerischen Modells (1 Prozessor)	193
C.2. Vergleich des berechneten Schalldruckpegels, Variation des numerischen Modells (1 Prozessor)	194
C.3. Vergleich der berechneten Schwingschnelle, Nutzung einer analytischen Lösung (1 Prozessor)	195
C.4. Vergleich der berechneten Schwingschnelle, Variation des mathematischen Modells (1 Prozessor)	196
C.5. Vergleich der berechneten Schwingschnelle, Variation des mathematischen Modells (1 Prozessor)	197
C.6. Vergleich des berechneten Schalldruckpegels, Variation des mathematischen Modells (1 Prozessor)	198
C.7. Vergleich der berechneten mittleren quad. Schnelle, Variation des Realitätsmodells (1 Prozessor)	199
D.1. Vergleich der Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung des Schalldämm-Maßes (1 Prozessor)	201
D.2. Fehler der Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung des Schalldämm-Maßes (1 Prozessor)	202

Tabellenverzeichnis

3.1. Anzahl FHG und Rechenzeit je Frequenzstützstelle der Modelle zur Demonstration der Verfahrensidee	53
3.2. Testfall zum Einfluss der geschätzten Anteile der Modelle auf die Ersparnis	72
4.1. Übersicht der in dieser Arbeit untersuchten Verifikationsbeispiele . .	86
4.2. Modellparameter der Fensterscheibe und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des numerischen Modells	91
4.3. Ergebnisse bei Variation des numerischen Modells, Variation der Diskretisierung, Körperschall	94
4.4. Modellparameter des Impedanzrohres und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des numerischen Modells	96
4.5. Ergebnisse bei Variation des numerischen Modells, Variation der Diskretisierung, Luftschall	99
4.6. Modellparameter des Schwingfundaments und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des numerischen Modells	101
4.7. Ergebnisse bei Variation des numerischen Modells, Nutzung einer analytischen Lösung	103
4.8. Modellparameter der Platte und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des mathematischen Modells	106
4.9. Ergebnisse bei Variation des mathematischen Modells, Nutzung alternativer finiter Elemente	108
4.10. Ergebnisse bei Variation des mathematischen Modells, Nutzung analytischer Lösungen	111
4.11. Modellparameter des Schalldämpfers und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des mathematischen Modells	114
4.12. Ergebnisse bei Variation des mathematischen Modells, Nutzung alternativen Materialmodell	117
4.13. Modellparameter der Verglasung und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Variation des Realitätsmodells	120
4.14. Ergebnisse bei Variation des Realitätsmodells, Vernachlässigung eines Teils des Berechnungsgebiets	122
4.15. Modellparameter der Platte und Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens, Untersuchung der Eigenschaften des Verfahrens	126
4.16. Übersicht der vereinfachten Modelle zur Untersuchung der Eigenschaften des Verfahrens	127
4.17. Übersicht der Variation der verwendeten vereinfachten Modelle . . .	127

4.18. Einstellungen zur Untersuchung des Einflusses des gewählten Validierungskriteriums	131
5.1. Modellparameter der doppelschaligen Wand, Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens	146
A.1. Parameter des BIOT-Modells, Ergebnisse inverse Parameterermittlung	186
B.1. XML-Tags der Erweiterung der <code>ELPASO</code> -Eingabedatei	190
B.2. Übersicht der Attributwerte der XML-Struktur	191

A. Inverse Materialparameterbestimmung poröser Materialien

Die Untersuchungen zur Variation des mathematischen Modells in Abschnitt 4.2.2 verwendet neben dem Referenzmodell ein vereinfachtes Modell zur Beschreibung des akustischen Verhaltens poröser Materialien. Das Referenzmodell verwendet zur Beschreibung des porösen Materials die Theorie von BIOT [23, 24]. Das BIOT-Modell modelliert die Wellenausbreitung in der Fluidphase und der Festkörperphase des Materials jeweils getrennt. Dabei wird eine Druckwelle in der Fluidphase sowie je eine Druck- und eine Schubwelle in der Festkörperphase berücksichtigt. Die zugehörigen, dreidimensionalen Hexaeder-Elemente besitzen vier FHG je Knoten. Dabei entspricht ein FHG dem Schalldruck, die verbleibenden drei FHG bilden die Verschiebungen der Festkörperphase in den drei Raumrichtungen ab. Als vereinfachtes Modell wird ein Modell der Klasse der äquivalenten Fluide verwendet. Die zugehörigen Elemente als FHG besitzen nur den Schalldruck.

Als poröses Material wird in Abschnitt 4.2.2 exemplarisch poröses Aluminium PA80-110 verwendet. Eine ausführliche Charakterisierung des Materials ist beispielsweise in [124] angegeben. Gegenstand dieses Kapitels ist die Bestimmung der Materialparameter zur Beschreibung des porösen Aluminiums mittels des Modells von BIOT sowie als äquivalentes Fluid. Die Bestimmung der Parameter des BIOT-Modells erfolgt als Optimierungsverfahren. Es handelt sich um ein inverses Vorgehen. Dabei werden die für die Modellierung verwendeten Materialparameter iterativ verändert und jeweils die Systemantwort mittels FEM berechnet. Das Verfahren wird wiederholt, bis die berechnete Systemantwort einer gemessenen Zielgröße entspricht. Als Zielgröße wird der Absorptionsgrad des porösen Materials verwendet. Das Verfahren ist ausführlich in Abschnitt A.3 beschrieben. Die für die Verwendung eines äquivalenten Fluids erforderlichen Daten können direkt aus Messungen gewonnen werden. Die dazu erforderlichen Berechnungen sind in Abschnitt A.2 beschrieben. Einen Überblick über die erforderlichen Messungen gibt Abschnitt A.1.

A.1. Messungen im Impedanz- und Transmissionsrohr

Für die Modellierung des porösen Materials als äquivalentes Fluid werden die komplexe äquivalente Dichte ρ_{eq} und der äquivalente Kompressionsmodul K_{eq} benötigt. Diese Größen können aus der komplexen Wellenzahl k_{eq} und der charakteristischen Impedanz Z_{eq} des porösen Material ermittelt werden. Die komplexe Wellenzahl und die charakteristische Impedanz werden im Vier-Mikrofon-Verfahren nach [5]

direkt gemessen. Dabei befindet sich eine Probe des porösen Materials in einem Transmissionsrohr und wird von einer Seite durch eine ebene Schallwelle beaufschlagt. Daher sind die gemessenen Werte nur für senkrechten Schalleinfall mit ebenen Wellen gültig. Die Messungen werden in einem Transmissionsrohr mit einem Durchmesser von 30 mm durchgeführt. Der Frequenzbereich der Ergebnisse umfasst 900 – 6.600 Hz.

Die Bestimmung der Materialparameter des BIOT-Modells erfolgt mittels eines Optimierungsverfahrens. Es werden die Parameter des BIOT-Modells optimiert. Als Referenzgröße wird der gemessene Absorptionsgrad der Probe verwendet. Die Zielgröße der Optimierung ist die Abweichung des berechneten und des gemessenen Absorptionsgrades. Dieser wird im Impedanzrohr gemäß [45, 46] gemessen. Analog zu der Messung der komplexen Wellenzahl und der charakteristischen Impedanz ist auch der Absorptionsgrad nur für senkrechten Schalleinfall ebener Wellen gültig. Der Frequenzbereich der Messergebnisse ist ebenfalls 900 – 6.600 Hz.

Neben dem Absorptionsgrad wird der spezifische Strömungswiderstand des porösen Aluminiums gemessen. Diese Größe geht ebenfalls in das Materialmodell von BIOT ein. Dadurch ist eine Größe weniger während der Optimierung zu berücksichtigen. Der Strömungswiderstand wird gemäß [42] mit dem Verfahren B, mit oszillierendem Luftvolumenstrom, gemessen.

A.2. Bestimmung der Materialparameter für das äquivalente Fluid

Die homogene HELMHOLTZ-Gleichung, vgl. Gleichung (2.18), enthält als Feldgröße den Schalldruck p , die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ mit der Frequenz f sowie die Schallgeschwindigkeit c .

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.18)$$

Die HELMHOLTZ-Gleichung kann für poröse Materialien nach [131] auch unter Verwendung der äquivalenten Dichte ρ_{eq} und des Kompressionsmoduls K_{eq} formuliert werden:

$$\Delta p + \frac{\rho_{eq}}{K_{eq}} \omega^2 p = 0 \quad (4.7)$$

Die äquivalente Dichte und der Kompressionsmodul sind typischerweise die Größen, die durch die Modellklasse der äquivalenten Fluide prognostiziert werden. Die Implementierung des Materialmodells des äquivalenten Fluids innerhalb der verwendeten FEM-Software erfordert die Vorgabe der effektiven Dichte ρ_{eq} sowie der komplexen Schallgeschwindigkeit c_{eq} . Aufgrund der Ausbreitungsdämpfung des Schalls im porösen Material sind alle beteiligten Größen komplexwertig, darunter auch die

Schallgeschwindigkeit. Daher wird für den Spezialfall der porösen Materialien der Index 'eq' verwendet.

Der Kompressionsmodul K_{eq} und die komplexe, äquivalente Dichte ρ_{eq} können durch die charakteristische Impedanz der porösen Materials Z_c und die komplexe Wellenzahl k_{eq} entsprechend der Gleichungen (A.1) und (A.2) dargestellt werden [8, 48, 102]:

$$\rho_{eq} = Z_{eq} \frac{k_{eq}}{\omega} \quad (\text{A.1})$$

$$K_{eq} = \omega \frac{Z_{eq}}{k_{eq}} \quad (\text{A.2})$$

Im Versuch werden die charakteristische Impedanz Z_c und die komplexe Wellenzahl k_{eq} im Vier-Mikrofon-Verfahren gemäß [5] frequenzabhängig gemessen. Die für die Implementierung des äquivalenten Fluids erforderliche, äquivalente Dichte kann anhand Gleichung (A.1) bestimmt werden. Die komplexe Schallgeschwindigkeit kann aus der Definition der komplexen Wellenzahl im Material $k_{eq} = \frac{\omega}{c_{eq}}$ ermittelt werden. Damit sind alle Größen für die FEM-Berechnung mit dem Modell des äquivalenten Fluids bekannt.

A.3. Bestimmung der Materialparameter des Biot-Modells

Als Referenzmodell in Abschnitt 4.2.2 wird eine Elementformulierung verwendet, welche das BIOT-Modell implementiert. Das Biot-Modell berücksichtigt drei Wellentypen innerhalb des porösen Materials. Innerhalb der festen Phasen breiten sich eine Druck- und eine Schubwelle aus, innerhalb der Fluidphase breitet sich nur eine Druckwelle aus [8]. Tabelle A.1 gibt die für die Modellierung des porösen Materials mit dem BIOT-Modell und die nach dem Optimierungsverfahren erhaltenen, optimierten Materialparameter an.

Im Rahmen dieser Arbeit wird poröses Aluminium als Material verwendet. Die Ermittlung der Materialparameter erfolgt mit einem Optimierungsverfahren als inverse Parameterermittlung. Die Parameter der festen Phase werden als identisch mit den Werten für Aluminium angenommen. Der spezifische Strömungswiderstand wird gemäß [42] mit Messverfahren B bestimmt. Somit verbleiben die Größen α_0 , α_∞ , ϕ , Λ_v , Λ_t zunächst als Unbekannte. Die Bestimmung der Werte dieser Größen erfolgt als Optimierungsverfahren. Dazu wird der sich einstellende Absorptionsgrad für eine willkürlich gewählte Parameterkombination berechnet. Die Abweichung dieses Ergebnisses von dem gemessenen Absorptionsgrad wird durch Anpassung der Materialparameter minimiert. Dazu wird der Absorptionsgrad einer 20 mm dicken Probe des porösen Aluminiums im Impedanzrohr gemäß [46, 45] bestimmt. Nachfolgend

Tabelle A.1.: Parameter des BIOT-Modells, Ergebnisse inverse Parameterermittlung

Bezeichnung	Herkunft	Symbol	Wert
E-Modul	Annahme	E	$70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
Dichte	Annahme	ρ_{Skelett}	2.700 kg/m^3
Poisson-Zahl	Annahme	ν	0,34
Verlustfaktor	Annahme	η	0,001
Dichte	Annahme	ρ_0	$1,225 \text{ kg/m}^3$
Strömungswiderstand (spez.)	Messung	Ξ	$32.950,0 \text{ N/(s m}^4\text{)}$
Tortuosität ($\lim_{f \rightarrow 0}$)	Optimierung	α_0	3,578 5
Tortuosität ($\lim_{f \rightarrow \infty}$)	Optimierung	α_∞	2,342 1
Porosität	Optimierung	ϕ	0,609
Viskose charakt. Länge	Optimierung	Λ_v	$130,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Thermale charakt. Länge	Optimierung	Λ_t	$123,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

wird der gemessene Absorptionsgrad als α_{Messung} bezeichnet, um eine Verwechslung mit der Tortuosität auszuschließen. Der Frequenzbereich der Messung ist, wie auch schon für die vorherigen Messungen, 900 – 6.600 Hz.

Für die Optimierung wird ein FEM-Modell eines Impedanzrohres verwendet. Die FEM-Berechnung bildet die Messung des Absorptionsgrades nach und wird im Frequenzbereich mit 218 Frequenzstützstellen von 100 – 6.610 Hz durchgeführt. Während der Optimierung wird für den aktuell untersuchten Satz der Werte der zu optimierenden Materialparameter die Schalldruckverteilung im Impedanzrohr berechnet. Mittels des *mini-max-Verfahrens*, analog zu dem Messverfahren in [44], wird der resultierende Absorptionsgrad α_{FEM} als frequenzabhängige Größe $\alpha_{\text{FEM}} = \alpha_{\text{FEM}}(f)$ berechnet. Als Zielgröße Γ der Optimierung wird die mittlere, quadratische Abweichung des gemessenen und des berechneten Absorptionsgrades verwendet:

$$\Gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\alpha_{\text{Messung}}(f^i) - \alpha_{\text{FEM}}(f^i) \right)^2 \quad (\text{A.3})$$

Aufgrund der deutlich höheren Frequenzauflösung der Messung werden die gemessenen Werte auf die Frequenzstützstellen der Berechnung interpoliert. Das inverse Verfahren ist in Abbildung A.1 dargestellt. Unter Verwendung der Definition aus Gleichung (A.3) wird die Abweichung des berechneten und des gemessenen Absorptionsgrades bestimmt. Auf Basis der Abweichung verändert der Optimierungsalgorithmus den Satz der Materialparameter. Als Optimierungsalgorithmus wird der in der *scipy*-Bibliothek [73] frei verfügbare NELDER-MEAD-Simplex Algorithmus [57] verwendet.

In Abbildung A.2 ist das Ergebnis der Materialparameterermittlung dargestellt. Es ist jeweils der Absorptionsgrad über der Frequenz aufgetragen. Die mit einem Kreuz markierten Werte sind das Ergebnis der Messung im Impedanzrohr. Die graue,

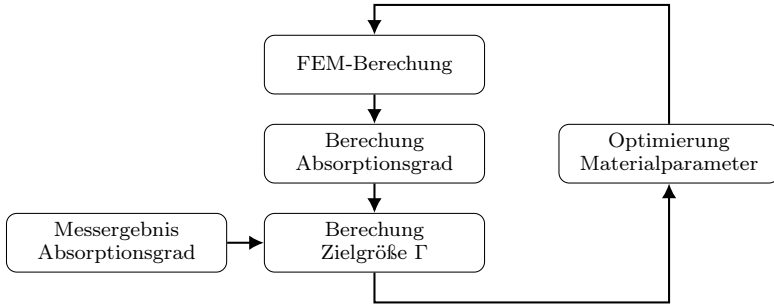


Abbildung A.1.: Schematischer Ablauf der inversen Parameterbestimmung

durchgezogene Linie zeigt den Absorptionsgrad für die in Tabelle A.1 angegebenen Parameter des BIOT-Modells. Die schwarze, gestrichelte Linie zeigt den Absorptionsgrad bei Verwendung des äquivalenten Fluids. Im Bereich unterhalb 2.800 Hz verlaufen alle Kurven sehr ähnlich. Während das BIOT-Modell im gesamten Frequenzbereich eine gute Übereinstimmung mit den Messergebnissen aufweist, weichen die Werte des äquivalenten Fluids für höhere Frequenzen von denen der Messung ab. Der Vollständigkeit halber sei hier darauf hingewiesen, dass die mit dem Optimierungsverfahren erhaltenen Materialparameter nicht notwendigerweise den tatsächlichen physikalischen Werten entsprechen, da es sich um ein lokales Optimum handeln kann. Dennoch retten diese Werte erfolgreich das Phänomen.

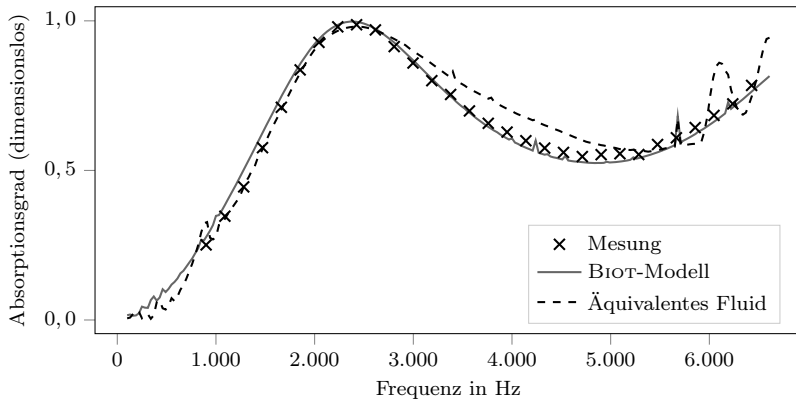


Abbildung A.2.: Frequenzgang des Absorptionsgrades des porösen Aluminiums. Vergleich Messung und FEM-Berechnung (BIOT-Modell und äquivalentes Fluid). Die Parameter des BIOT-Modells werden durch inverse Parameteridentifikation gewonnen, die Parameter des äquivalenten Fluids werden aus der Messung gewonnen.

B. Erweiterung der ePaSo-Eingabedatei

Der in Abschnitt 3.5.5, Abbildung 3.8 vorgestellte Algorithmus wird in der Programmiersprache *python 2.7* implementiert. Die am Institut für Akustik verwendete inhouse-Software für FEM-Berechnungen ELPASO verwendet so genannte *ak3*-Dateien als Eingabedatei. Die *ak3*-Datei definiert das zu berechnende Problem. Die *ak3*-Datei ist als xml-Datei formatiert. Die Steuerung des Algorithmus und die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Einstellmöglichkeiten werden mit einem Abschnitt innerhalb der *ak3*-Datei definiert. Ein beispielhafter Abschnitt der *ak3*-Datei ist in Abschnitt B.1 dargestellt. Tabelle B.1 führt die zur Verfügung stehenden tags und Tabelle B.2 die möglichen Attribut-Werte auf.

B.1. Beispiel der Erweiterung

```
1 <HybridModel>
2   <CorrelateDOF>z</CorrelateDOF>
3   <CorrelationMethod>leveldiff</CorrelationMethod>
4   <CorrelationParam>1.5</CorrelationParam>
5   <SamplingMethod>linear</SamplingMethod>
6   <SubModel>
7     <path>./model1/model1.py</path><type></type>
8   </SubModel>
9   <SubModel>
10    <path>./model2/model2.ak3</path><type></type>
11  </SubModel>
12  <SubModel>
13    <path>./model3/model3.ak3</path><type></type>
14  </SubModel>
15  <Procedure>
16    <FrequencyGroup f0="100.0" f1="185.0" model="1"/>
17    <FrequencyGroup f0="190.0" f1="335.0" model="1"/>
18    <FrequencyGroup f0="340.0" f1="435.0" model="0"/>
19    <FrequencyGroup f0="440.0" f1="550.0" model="0"/>
20  </Procedure>
21 </HybridModel>
```

B.2. Parameter zur Einstellung des Multi-Modell-Verfahrens

Tabelle B.1.: Übersicht über die XML-Tags der Erweiterung der eLPaSo-Eingabedatei. Alle XML-Tags sind durch die jeweilige Entsprechung `</Tag>` zu schließen.

XML-Tag	Werte	Erläuterung
<code><HybridModel></code>	–	Identifikator für das Multi-Modell-Verfahren
<code><path></code>	<code>*.ak3</code> , <code>*.py</code>	Pfad zu einer Modelldatei (Angabe absolut / relativ)
<code><CorrelatedOF></code>	<code>x</code> , <code>y</code> , <code>z</code> , –	Der zur Validierung zu verwendende Freiheitsgrad
<code><CorrelationMethod></code>	<code>simplifiediff</code> , <code>reliff</code> , <code>leveldiff</code> , <code>meanleveldiff</code> , <code>bhattta</code>	das zu verwendende Validierungskriterium vgl. Tabelle B.2
<code><CorrelationParam></code>	x_1, x_1, \dots, x_n	Parameter des Validierungskriteriums; kommagetrennt
<code><SamplingMethod></code>	<code>linear</code> , <code>MC</code>	Methode zur Verteilung der Testpunkte
<code><SubModel></code>	–	Identifikator für ein vereinfachtes Modell
<code><type></code>	<code>python</code> , <code>elpaso</code>	optional, Identifikator für die Berechnungsdomäne
<code><Procedure></code>	–	Identifikator zur Vorgabe bereits bekannter Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle
<code><FrequencyGroup></code>	<code>f0</code> , <code>f1</code> , <code>model</code>	Vorgabe von Frequenzgruppen (Grenzen <code>f0</code> und <code>f1</code>) und dem zu verwendenden Modell <code>model</code>
<code><freqGroupsMethod></code>	<code>aroundReso</code> , –	Lage der Frequenzgruppen

B.3. Attribut-Werte der XML-Struktur

Tabelle B.2.: Übersicht der Attributwerte der XML-Struktur

Attribut	Erläuterung	
<code>model</code>	Wert, beginnend bei 0, aufsteigend, Nummer des Modells	
<CorrelationParam>	Auswählbare Validierungskriterien	
	<code>simplifiediff</code>	1 Wert; Wert der einfachen Differenz
	<code>reldiff</code>	1 Wert; Wert der relativen Differenz
	<code>leveldiff</code>	1 Wert; Wert der einfachen Pegeldifferenz
	<code>meanleveldiff</code>	1 Wert; Wert der mittleren Pegeldifferenz
	<code>bhatta</code>	2 Werte; 1. Wert: Standardabweichung; 2. Wert: Anzahl MC-Simulationen
<SamplingMethod>	Art der Verteilung der Testpunkte in der Frequenzgruppe	
	<code>linear</code>	gleichmäßige Verteilung
	<code>MC</code>	stochastisch verteilt, Gleichverteilung
<freqGroupsMethod>	Art der Lage der Frequenzgruppen	
	<code>aroundReso</code>	Frequenzgruppe zwischen zwei Minima
	<code>-</code>	default – zwischen Minimum und Maximum

C. Verifikationsrechnungen ohne Parallelisierung

Variation des numerischen Modells – Schwingschnelle einer Fensterscheibe

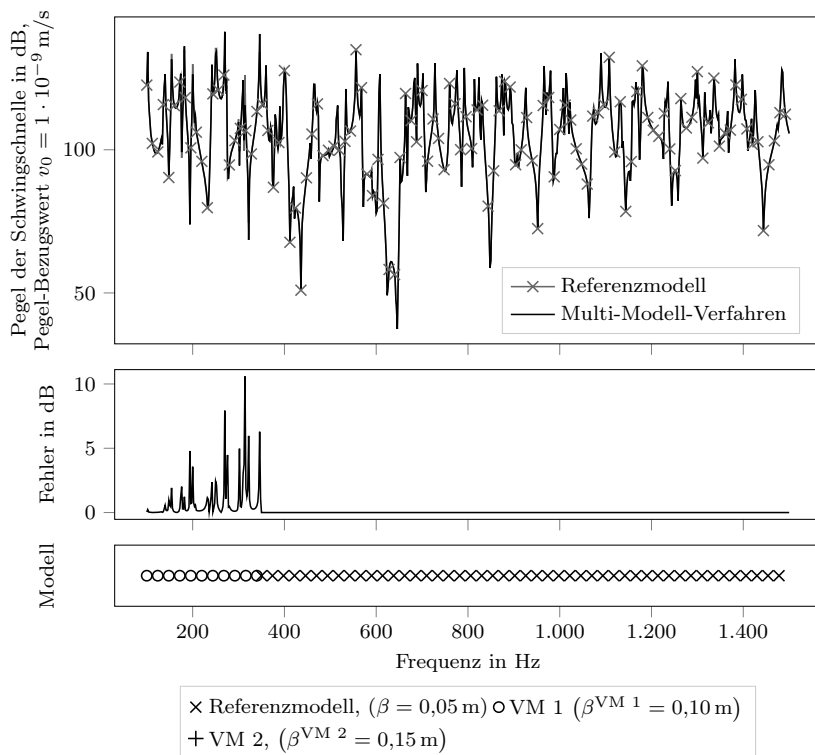


Abbildung C.1.: Vergleich der berechneten Schwingschnelle mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der approximierten Systemantwort (Mitte), Einsatzbereiche der verwendeten Modelle (unten). Variation der Diskretisierung. Berechnung mit einem Prozessor.

Variation des numerischen Modells – Schalldruckpegel in einem Impedanzrohr

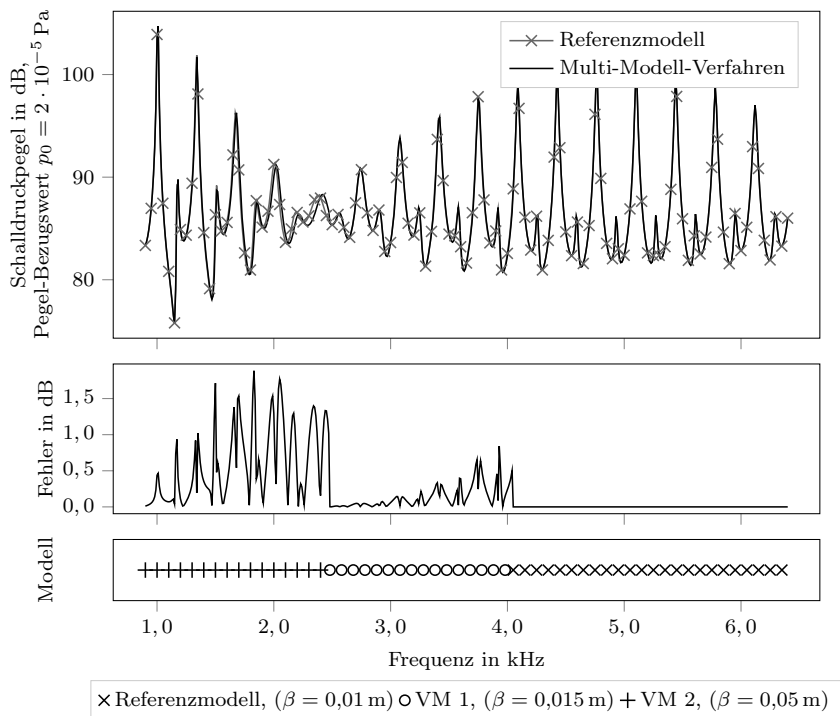


Abbildung C.2.: Vergleich des berechneten Schalldruckpegels in der mit X markierten Ebene, Berechnung mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben, Abweichung der approximierten Systemantwort (Mitte)), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation der Diskretisierung. Berechnung mit einem Prozessor.

Variation des numerischen Modells – Schwingschnelle einer Schwingfundaments

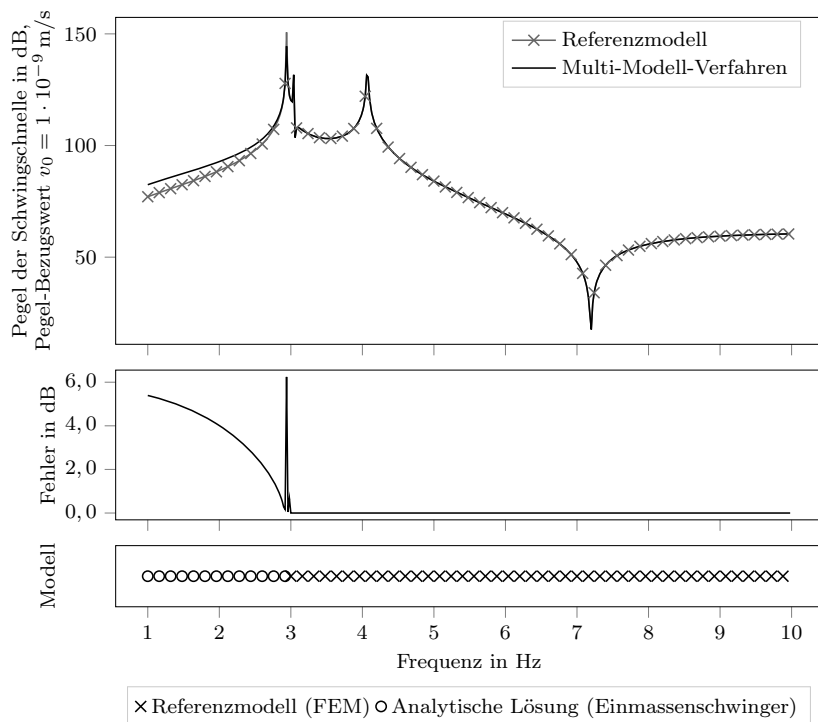


Abbildung C.3.: Vergleich der berechneten Schwingschnelle des Schwingfundaments an dem mit v markierten Ort mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der approximierten Systemantwort (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Nutzung einer analytischen Lösung. Berechnung mit einem Prozessor.

Variation des mathematischen Modells – Schwingschnelle einer Platte

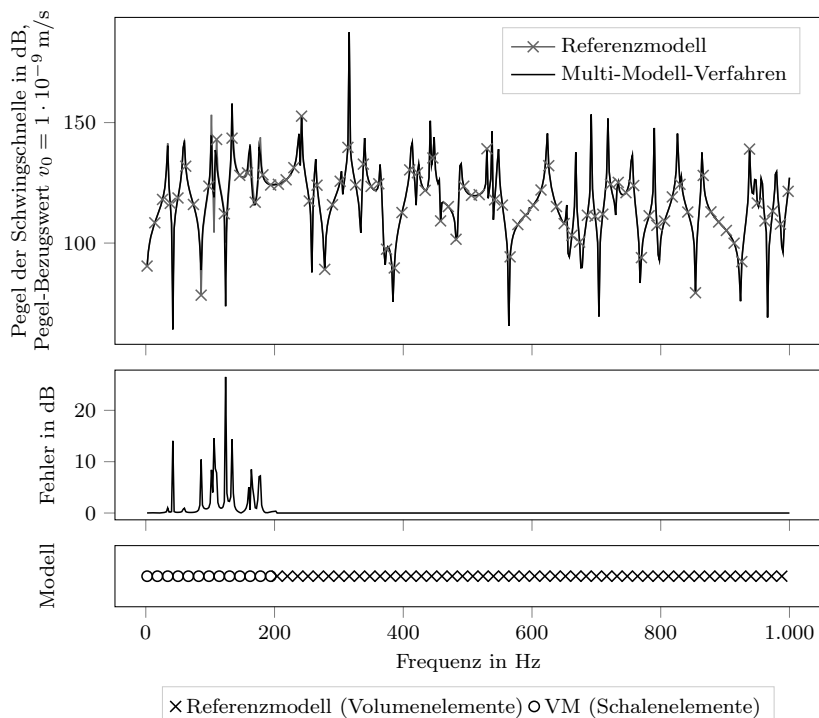


Abbildung C.4.: Vergleich der berechneten Schwingschnelle an dem mit v markierten Ort mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens mit einem vereinfachten Modell (oben), Abweichung der approximierten Systemantwort (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des mathematischen Modells. Berechnung mit einem Prozessor.

Variation des mathematischen Modells – Schwingschnelle einer Platte

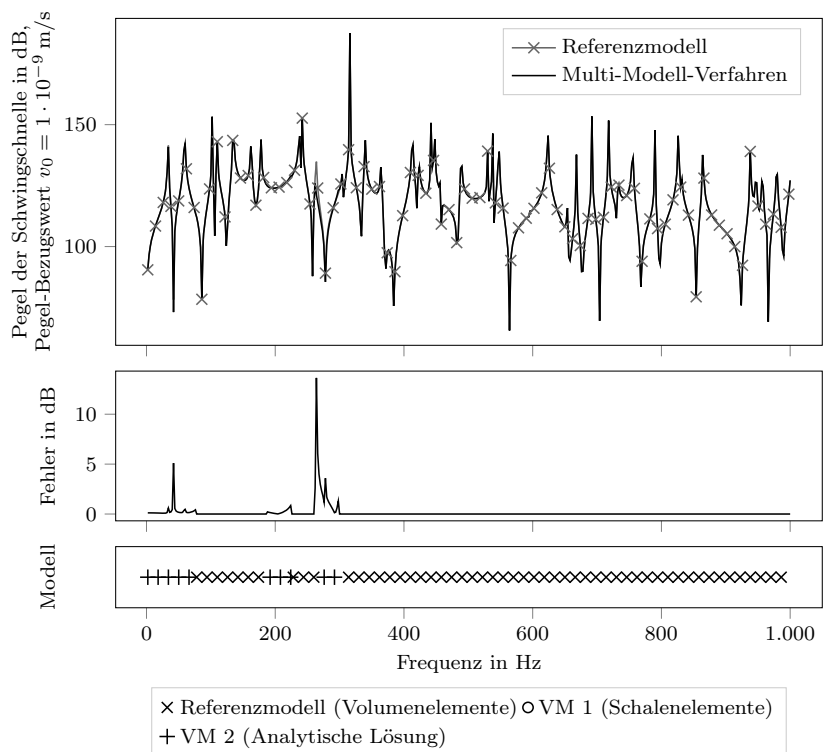


Abbildung C.5.: Vergleich der berechneten Schwingschnelle an dem mit v markierten Ort mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens mit zwei vereinfachten Modellen (oben), Abweichung der approximierten Systemantwort (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des mathematischen Modells. Berechnung mit einem Prozessor.

Variation des mathematischen Modells – Schalldruckpegel in einem Schalldämpfer

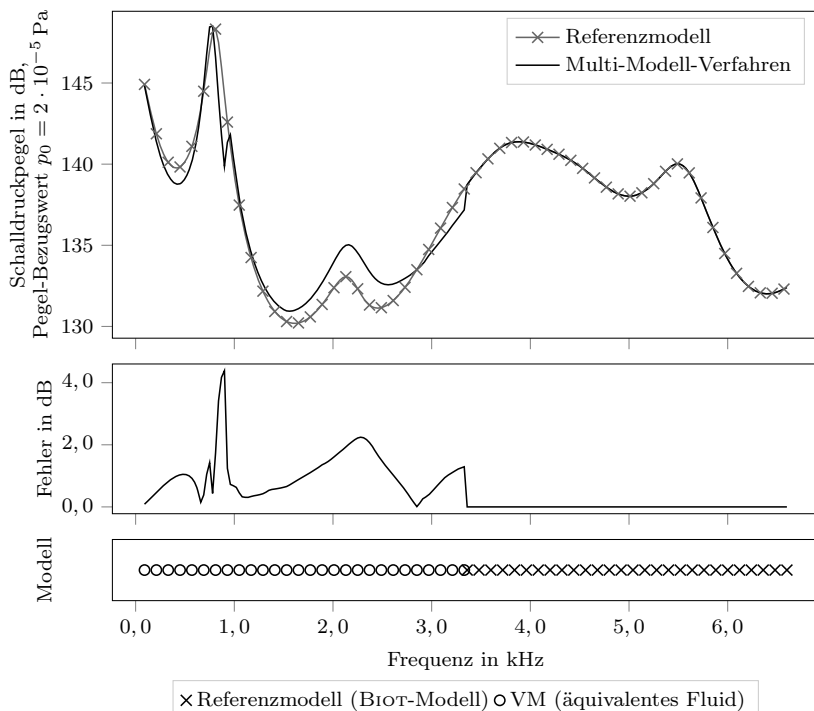


Abbildung C.6.: Vergleich des berechneten Schalldruckpegels in der mit X markierten Ebene, Berechnung mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der approximierten Systemantwort (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des mathematischen Modells. Berechnung mit einem Prozessor.

Variation des Realitätsmodells – Mittlere quadratische Schnelle einer Verglasung

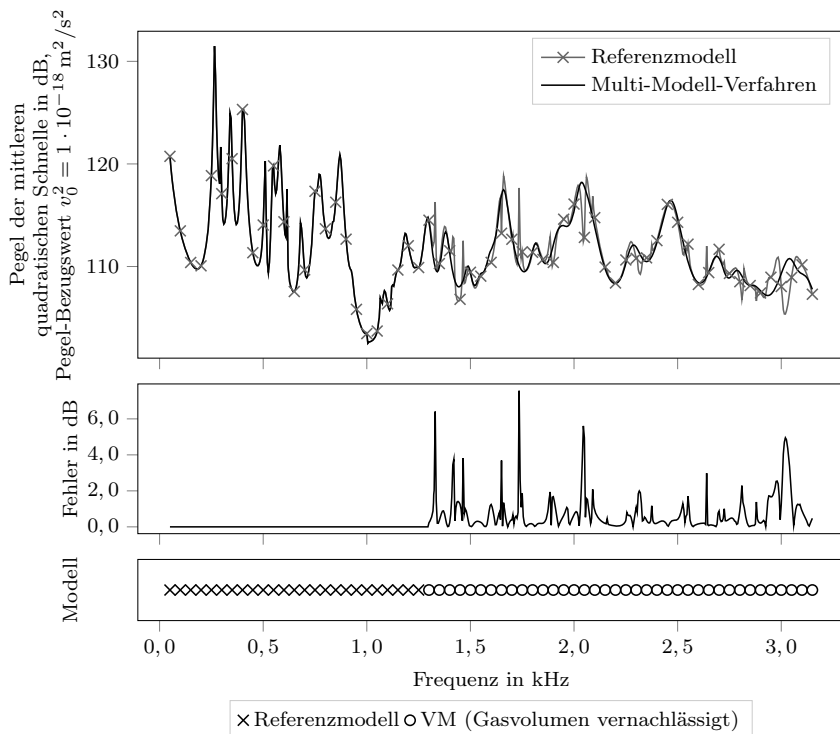


Abbildung C.7.: Vergleich der berechneten mittleren quadratischen Schnelle auf der hinteren Scheibe mit dem Referenzmodell und bei Verwendung des entwickelten Multi-Modell-Verfahrens (oben), Abweichung der approximierten Systemantwort (Mitte), Einsatzbereiche der Modelle (unten). Variation des Realitätsmodells. Berechnung mit einem Prozessor.

D. Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung

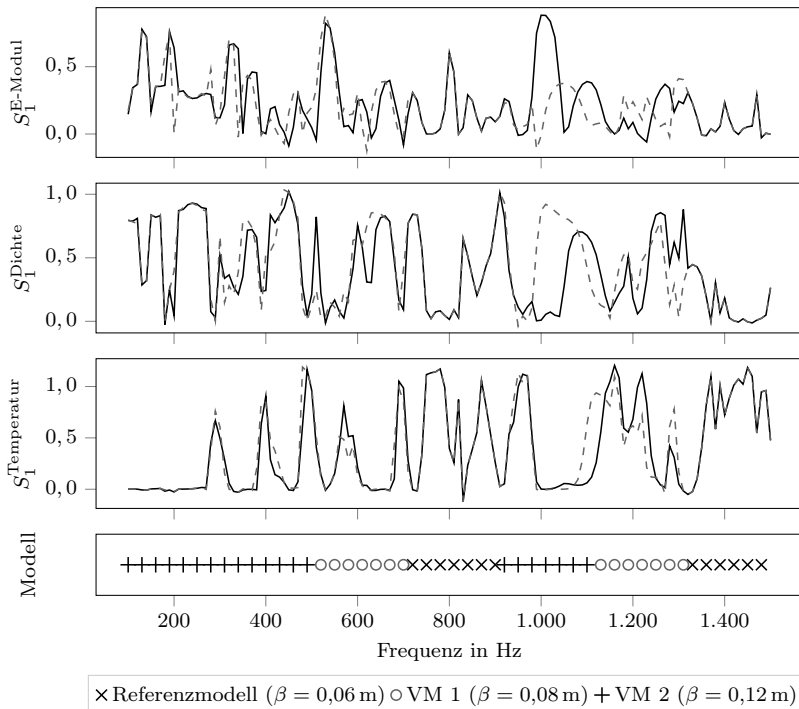


Abbildung D.1.: Vergleich der Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung für die Parameter E-Modul (oben), Dichte (Mitte) und Temperatur (unten) bei Berechnung mit dem Referenzmodell ('--') sowie Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens ('-'). Einsatzbereiche der vereinfachten Modelle (ganz unten), Markierung an jeder dritten Frequenzstützstelle. Berechnung mit einem Prozessor.

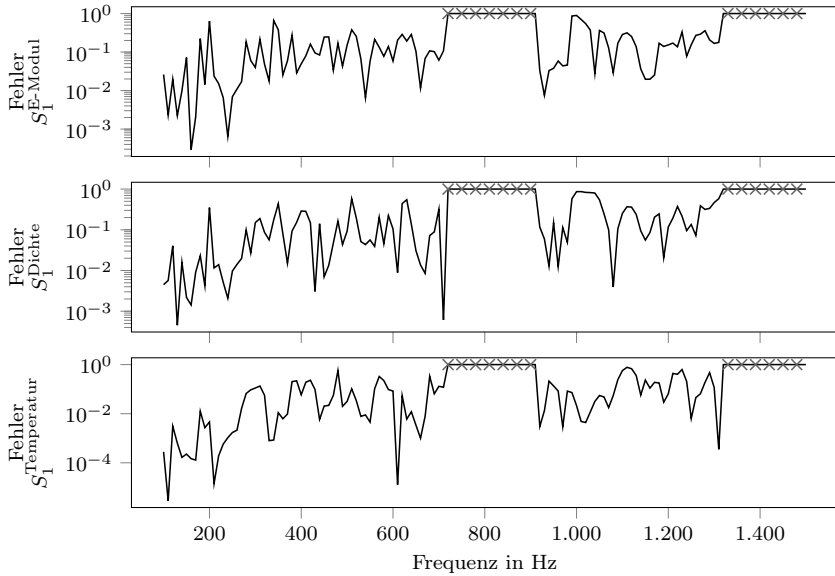


Abbildung D.2.: Fehler der mit dem Multi-Modell-Verfahren berechneten, Sensitivitätskoeffizienten erster Ordnung für die Parameter E-Modul (oben), Dichte (Mitte) und Temperatur (unten) über der Frequenz. Bereiche verschwindenden Fehlers (Bereiche in denen das Referenzmodell verwendet wird) sind mit einem Kreuz markiert. Berechnung mit einem Prozessor.